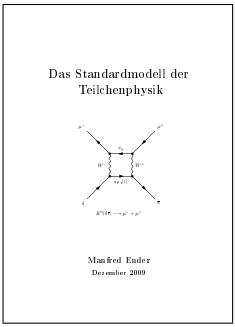
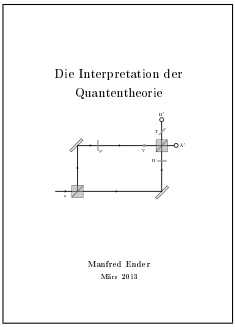
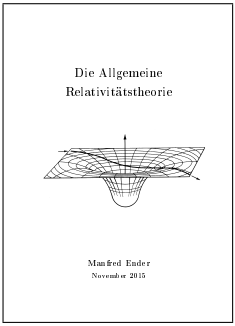
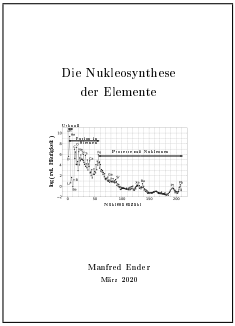
Ergänzende Aspekte zu den Büchern









Manfred Ender

Februar 2022

Ergänzungsstand: 04/2024
webmaster@manfred-ender.serpedon.de

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung **1**

I Das Standardmodell der Teilchenphysik **3**

1 Potentielle Energie **5**
1.1 Die Gleichungen der Elektrostatik 5
1.2 Die potentielle Energie 7
1.3 Das elektrische Potential 9
1.4 Die Energieerhaltung 11
1.5 Ergänzende Bemerkung 12

2 Poincare-Transformation **13**
2.1 Transformation der Wellenfunktion 13
2.2 Lorentz-Transformation des Bezugssystems 16
2.3 Translationen des Zustandsvektors 17
2.4 Poincare-Transformation des Feldzustands 18

3 Kopplungen mit Ableitungen **19**
3.1 Vorbemerkungen 19
3.2 Wdh.: Die Störungsreihe 19
3.3 Vergleich mit dem Pfadintegral 20
3.4 Skalare Quanten-Elektrodynamik 23
3.5 Die Identität 25

4 Einfluss der Mischung der Generationen **29**
4.1 Die Lebensdauer vom Myon 29
4.2 Die Lebensdauer vom Neutron 30
4.3 Kurze Erläuterung 30

5 Das Wasserstoff-Atom **31**
5.1 Anwendung der Schrödinger-Gleichung 31
5.2 Zusätzliche Störungsrechnungen 33
5.3 Anwendung der Dirac-Gleichung 36
5.4 Vergleich der Ergebnisse 38
5.5 Die Hyperfeinstruktur 39
5.6 Weitere Effekte 40
5.7 Zusammenfassung 41

6 Das magnetische Moment des Elektrons **43**
6.1 Der gyromagnetische Faktor 43
6.2 Dirac-Gleichung vs. QED 44
6.3 Der Vertexfaktor mit Strahlungskorrekturen 47
6.4 Der Formfaktor in zweiter Ordnung 49
6.5 Messung des magnetischen Moments 55
6.6 Die Feinstrukturkonstante 58
6.7 Korrekturen höherer Ordnung 60

II Die Interpretation der Quantentheorie **63**

7 Kanonische Eichtransformationen **65**

8 Beschreibung in einem Volumen **67**
8.1 Normierung der Feldoperatoren 67
8.2 Die skalare Wellenfunktion 72
8.3 Die Spinor-Wellenfunktion 75
8.4 Die Wellenfunktion des Vakuums 78

III Die Allgemeine Relativitätstheorie **79**

9 Das Zwillingsparadoxon **81**
9.1 Vorbemerkungen 81
9.2 Das Szenario 83
9.3 Die Eigenzeiten aus Sicht der Erde 84
9.4 Parametrisierung der Zeitkoordinaten 87
9.5 Das beschleunigte Bezugssystems 87
9.6 Die Eigenzeiten aus Sicht des Raumschiffes 90
9.7 Die Eigenzeit im Raumschiff 93
9.8 Das Erdsystem aus Sicht des Raumschiffes 94

9.9 Berücksichtigung einer Gleitphase . . . 98
9.10 Eine verbleibende Unstetigkeit . . . 101
9.11 Anwendung der ART . . . 101
9.12 Abschließende Anmerkungen . . . 107

10 Das Photon in der ART **109**
10.1 Die Maxwell-Gleichungen in der SRT . . . 109
10.2 Die Maxwell-Gleichungen in der ART . . . 111
10.3 Die Eikonal-Näherung . . . 112
10.4 Interpretation der Eikonal-Näherung . . . 115

11 Die gravitative Rotverschiebung **117**
11.1 Eigenzeitbetrachtung . . . 117
11.2 Prozessbetrachtung . . . 118
11.3 Bewegung in der Schwarzschild-Metrik . . . 121
11.4 Energiebetrachtung . . . 123
11.5 Frequenzbetrachtung . . . 123
11.6 Abschließende Bemerkung . . . 124

12 Das Prinzip der maximalen Kraft **125**
12.1 Das Prinzip der maximalen Kraft . . . 125
12.2 Die Horizont-Gleichung . . . 127
12.3 Die Raychaudhuri-Identität . . . 128
12.4 Die Feldgleichungen . . . 130

13 Die Quantisierung des Raumes **131**
13.1 Wdh.: SU(N)-Gruppe . . . 131
13.2 Wdh.: Yang-Mills Theorie . . . 133
13.3 Änderung der Signatur der Metrik . . . 135
13.4 Hamilton-Form des Eichfeldes . . . 135
13.5 Wdh.: Die Ashtekar-Variablen . . . 137
13.6 Der Flächenoperator . . . 138
13.7 Einschub: Der klassische Tetraeder . . . 141
13.8 Der Volumenoperator . . . 141
13.9 Das minimale Volumen . . . 144
13.10Spin-Netzwerke . . . 146

IV Die Nukleosynthese der Elemente 149

14 Zustandsgrößen 151
14.1 Fundamentale Zustandgrößen 151
14.2 Abgeleitete Zustandgrößen 153
14.3 Gleichgewichtsbedingungen 154

15 Quantengase 155
15.1 Vorbetrachtungen 155
15.2 Einstein-Bose-Verteilung 157
15.3 Fermi-Dirac-Verteilung 158
15.4 Plausibilitätsbetrachtung 159
15.5 Übergang zur Thermodynamik 162
15.6 Der Druck 163
15.7 Grenzübergang zum Kontinuum 165
15.8 Die Zustandssumme 167

16 Das ideale Gas 169
16.1 Die Zustandsgleichung 169
16.2 Adiabatische Prozesse 171

Literaturverzeichnis 173

Vorbemerkung

In diesem Text habe ich voneinander unabhängige Ergänzungen zu meinen vier Büchern

- Das Standardmodell der Teilchenphysik
- Die Interpretation der Quantentheorie
- Die Allgemeine Relativitätstheorie
- Die Nukleosynthese der Elemente

gesammelt. Die kleinen Themen erschienen mir interessant genug, um sie auszuarbeiten und an dieser Stelle zusammenzufassen. Zu ihrem Verständnis ist der Rückgriff auf das jeweils zugeordnete Buch hilfreich. Dort finden sich auch Hinweise auf die verwendete Nomenklatur. Die einzelnen Themen sind dabei weitgehend unabhängig voneinander. Wenn nicht anders angemerkt, werden natürliche Einheiten verwendet.

Februar 2022 Manfred Ender

Teil I

Das Standardmodell der Teilchenphysik

Kapitel 1

Potentielle Energie

Vertiefung: Die potentielle Energie als Differenz von Feldenergien im Raum am Beispiel der Elektrostatik

1.1 Die Gleichungen der Elektrostatik

Aus der Quanten-Elektrodynamik lassen sich als Grenzfall die beiden klassischen Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{1.1.1}$$

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} = 0 \tag{1.1.2}$$

ableiten, wobei die übliche Konvention $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ verwendet wurde. Der Energie-Impulsdichte-Tensor des elektromagnetischen Feldes ist dabei

$$T^{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} F^{\mu\rho} F^{\nu\sigma} - \frac{1}{4}\, \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \qquad . \tag{1.1.3}$$

Ausgehend vom Feldstärketensor

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ +E^1 & 0 & -B^3 & +B^2 \\ +E^2 & +B^3 & 0 & -B^1 \\ +E^3 & -B^2 & +B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.4}$$

und nach Wiedereinführung der Konstanten ϵ_0 und μ_0 kann man die Maxwell-Gleichungen gleichwertig mit den elektromagnetischen Feldstärken in nicht-

relativistischer Schreibweise in

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = j^0 \tag{1.1.5}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \tag{1.1.6}$$

sowie

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{1.1.7}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{1.1.8}$$

umformulieren. Im statischen Fall, wenn alle Zeitableitungen verschwinden und keine externen Ströme vorhanden sind, ist die magnetische Induktion $\vec{B} = 0$ und es verbleiben die Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.1.9}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{1.1.10}$$

der Elektrostatik, wobei nun wie üblich für die Ladungsdichte die abgekürzte Schreibweise $\rho = j^0$ verwendet wurde. Aus dem Energie-Impulsdichte-Tensor folgt für die Energiedichte des statischen elektrischen Feldes

$$w = T^{00} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 \qquad . \tag{1.1.11}$$

Für eine Punktladung im Koordinatenursprung

$$\rho(x, y, z) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{1.1.12}$$

liefert Integration über ein Kugelvolumen V_K

$$\int_{V_K} \rho(x, y, z)\, dV = q \qquad . \tag{1.1.13}$$

Nun muss aus Gründen der Symmetrie an der Oberfläche der Kugel die elektrische Feldstärke konstant sein. Bezeichnet ∂K die Oberfläche der Kugel mit Radius r, dann gilt auch

$$\int_{V_K} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV = \int_{\partial K} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 \left|\vec{E}\right| \qquad . \tag{1.1.14}$$

Aus der Beziehung (1.1.9) folgt damit für das Feld einer Punktladung

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \quad . \tag{1.1.15}$$

Für das elektrische Feld einer Punktladung q_i am Ort $\vec{R}_i$ bedeutet dies

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{R}_i}{\left|\vec{r} - \vec{R}_i\right|^3} \quad . \tag{1.1.16}$$

1.2 Die potentielle Energie

Ist $\vec{R}_i = (0, 0, d)$ dann wird

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x, y, z-d)}{\left(x^2 + y^2 + (z-d)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad . \tag{1.2.1}$$

Es sei nun eine Ladung Q am Ort $\vec{R}_Q = (0, 0, 0)$ sowie eine zweite Ladung q gegeben. Für die zweite Ladung sollen nun zwei Situationen unterschieden werden. Die dabei auftretende Größe δ wird als infinitesimal angenommen.

Situation a: q am Ort $\vec{R}_a = (0, 0, D + \delta)$
Die Gesamtenergie ist dann

$$\begin{aligned} W_a &= \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int_V \left(\vec{E}_a + \vec{E}_Q\right)^2 dV \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int_V \left(\vec{E}_a^2 + 2\vec{E}_a\vec{E}_Q + \vec{E}_Q^2\right) dV \quad . \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Situation b: q am Ort $\vec{R}_b = (0, 0, D)$
Die Gesamtenergie ist in diesem Fall

$$\begin{aligned} W_b &= \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int_V \left(\vec{E}_b + \vec{E}_Q\right)^2 dV \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int_V \left(\vec{E}_b^2 + 2\vec{E}_b\vec{E}_Q + \vec{E}_Q^2\right) dV \quad . \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Die Differenz der Feldenergien zwischen diesen beiden Situationen wird

$$dW = W_b - W_a = \epsilon_0 \cdot \int_V \left(\vec{E}_b - \vec{E}_a\right) \vec{E}_Q \, dV$$

$$= \frac{\epsilon_0 qQ}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4\pi\epsilon_0} \int_V \left(\frac{(x,y,z-D)}{\left(x^2+y^2+(z-D)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x,y,z-D-\delta)}{\left(x^2+y^2+(z-D-\delta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \frac{(x,y,z)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \, dV \quad . \tag{1.2.4}$$

Nun ist

$$\int_V \frac{(x,y,z-d)}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(x,y,z)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \, dV = \int_V \frac{\left(x^2+y^2+z^2-zd\right) dV}{\left(x^2+y^2+z^2-2zd+d^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.2.5}$$

und Übergang zu Kugelkoordinaten mit $z = r\cos\vartheta$ und $dV = r^2 \sin\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi$ liefert

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{\left(r^2 - rd\cos\vartheta\right) r^2 \sin\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi}{\left(r^2-2rd\cos\vartheta+d^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot r^3}$$

$$= 2\pi \cdot \int_{u=-1}^{u=+1} du \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{\left(r-du\right) dr}{\left(r^2-2rdu+d^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad . \tag{1.2.6}$$

Weiter wird

$$\int_{r=0}^{r=\infty} \frac{\left(r-du\right) dr}{\left(r^2-2rdu+d^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left. \frac{-1}{\left(r^2-2rdu+d^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right|_{r=0}^{r=\infty} = \frac{1}{d} \quad . \tag{1.2.7}$$

Zusammen mit $\int_{u=-1}^{u=+1} du = 2$ und der Feldstärke E_Q am Ort $r = D$ der Ladung q bedeutet dies für die Differenz der Feldenergien

$$\begin{aligned} dW &= \frac{\epsilon_0 qQ}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+\delta} \right) \\ &= \frac{\epsilon_0 qQ}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \left(\frac{D+\delta}{D(D+\delta)} - \frac{D}{D(D+\delta)} \right) \\ &\simeq q \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\delta}{D^2} \\ &= q \cdot E_Q \cdot \delta \qquad . \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Dies bedeutet, dass sich das Volumenintegral der Feldenergie im Raum in den beiden Situationen unterscheidet. Will man die Ladung q um die Größe δ auf der z-Achse in Richtung der Ladung Q verschieben, muss man die Energie dW und damit eine Kraft F aufbringen. Es folgt das Kraftgesetz

$$F = \frac{dW}{\delta} = q \cdot E \tag{1.2.9}$$

der Elektrostatik. Die Diskussion hat gezeigt, dass die gesamte Feldenergie von den Lagen der Ladung q im Raum abhängt. Man spricht bei der potentiellen Energie deshalb auch von der Energie der Lage. Dies wird besonders plausibel, wenn man die vorstehenden Überlegungen auf die Gravitation überträgt. Bezeichnet h eine geringe Höhe über der Erdoberfläche, dann wird bezogen auf die Erdoberfläche für eine Masse m nämlich analog

$$W_{pot} = mgh \qquad . \tag{1.2.10}$$

Die potentielle Energie eines Systems von Ladungen bzw. von Massen ist also die Differenz der gesamten Feldenergie im Raum zu der Feldenergie, die im Raum vorliegen würde, wenn die Ladungen bzw. die Massen einer Referenzverteilung entsprechen.

1.3 Das elektrische Potential

Zwischen der potentiellen Energie und dem sogenannten Potential besteht ein enger Zusammenhang. Um dies einzusehen, ist die Gleichung (1.1.10) auszuwerten. Sie hat die Konsequenz, dass man die elektrische Feldstärke immer entsprechend

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \tag{1.3.1}$$

als Gradient eines Potentials darstellen kann. Das Potential erfüllt offensichtlich die Poisson-Gleichung

$$\vec{\nabla}^2\Phi = -\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad . \tag{1.3.2}$$

Ein System von Punktladungen

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i Q_i \delta(\vec{r} - \vec{R}_i) \tag{1.3.3}$$

führt im Raum zu den Feldstärken

$$E(\vec{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{R}_i}{\left|\vec{r} - \vec{R}_i\right|^3} \quad . \tag{1.3.4}$$

Einfache Integration liefert das zugehörige Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{R}_i\right|} \quad . \tag{1.3.5}$$

Die potentielle Energie lässt sich nun relativ einfach aus dem Potential berechnen. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass das Potential im Unendlichen verschwindet, gilt

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\epsilon_0}{2}\left(\vec{\nabla}\Phi\right)\Phi\right)\, dV = \int_{\partial V}\left(\frac{\epsilon_0}{2}\left(\vec{\nabla}\Phi\right)\Phi\right)\cdot d\vec{A} = 0 \tag{1.3.6}$$

und es folgt für die Gesamtenergie im Raum

$$\begin{aligned} W_{ges} &= \int_V \frac{\epsilon_0}{2}\, \vec{E}^2\, dV \\ &= \int_V \frac{\epsilon_0}{2}\, \left(\vec{\nabla}\Phi\right)^2 dV - \int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\epsilon_0}{2}\left(\vec{\nabla}\Phi\right)\Phi\right)\, dV \\ &= \int_V \frac{\epsilon_0}{2}\, \left(-\vec{\nabla}^2\Phi\right)\Phi\, dV \\ &= \frac{1}{2}\int_V \rho\, \Phi\, dV \quad . \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Für ein System von Punktladungen bedeutet dies wiederum

$$W_{ges} = \frac{1}{2}\int_V \left(\sum_i Q_i \delta(\vec{r} - \vec{R}_i)\right)\, \Phi\, dV = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\, \Phi(\vec{R}_i) \quad . \tag{1.3.8}$$

Liegt kein eingeprägtes externes Potential vor, wird weiter (wobei in etwas salopper Vorgehensweise im Nenner 0 auftaucht)

$$W_{ges} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}_i - \vec{R}_j|} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}_i - \vec{R}_j|} + \frac{1}{2}\sum_i \frac{Q_i^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0} \quad . \tag{1.3.9}$$

Nimmt man nun als Referenz die Situation an, in der alle Ladungen paarweise unendlich weit voneinander entfernt sind, d.h.

$$\left|\vec{R}_i^{ref} - \vec{R}_j^{ref}\right| = \infty \tag{1.3.10}$$

gilt, dann ist die Referenzenergie

$$W_{ref} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{Q_i^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0} \quad . \tag{1.3.11}$$

Die potentielle Energie des Systems der Punktladungen ergibt sich damit schließlich zu

$$W_{pot} = W_{ges} - W_{ref} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}_i - \vec{R}_j|} \quad . \tag{1.3.12}$$

Man sieht, dass durch diese Referenz die unendlich großen Selbstenergien der einzelnen Ladungen nichts mehr zu der potentiellen Energie beitragen.

1.4 Die Energieerhaltung

Es soll jetzt ein eingeprägtes Potential Φ angenommen werden, wie es als Beispiel durch ein statisches System von Ladungen erzeugt werden kann. Wird jetzt ein zusätzliches einzelnes Teilchen mit der Masse m und der Ladung q an einem Ort $\vec{r}$ betrachtet, so folgt aus der Bewegungsgleichung dieses Teilchens

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \quad . \tag{1.4.1}$$

Multiplikation mit $\frac{d\vec{r}}{dt}$ liefert

$$\begin{aligned} 0 &= m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} + q\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right) + q\,\frac{d}{dt}\Big(\Phi(\vec{r})\Big) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} + q\Phi(\vec{r})\right) \qquad . \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Als Konsequenz muss

$$W_{kin} + W_{pot} = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} + q\Phi(\vec{r}) = const. \tag{1.4.3}$$

gelten. Dies bedeutet, dass die Gesamtenergie des Teilchens erhalten ist und rechtfertigt noch einmal die Definition der potentiellen Energie.

1.5 Ergänzende Bemerkung

In der Literatur wird der Begriff Potential in etwas salopper Schreibweise auch oftmals synonym für den Potentialterm in der Hamilton-Funktion, d.h. für die potentielle Energie verwendet.

Kapitel 2

Poincare-Transformation

2.1 Transformation der Wellenfunktion

Im allgemeinen Fall ist die Lorentz-Transformation

$$\hat{U}(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{B}^{\mu\nu}} \cdot e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} \tag{2.1.1}$$

mit den Generator-Matrizen

$$M^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für skalare Felder} \\ T^{\mu\nu}_{4\times4} & \text{für Vektorfelder} \\ \Sigma^{\mu\nu}_{4\times4} & \text{für Spinorfelder} \end{cases} \tag{2.1.2}$$

und dem verallgemeinerten Bahndrehimpulsoperator

$$\hat{B}^{\mu\nu} = \hat{X}^{\mu}\hat{P}^{\nu} - \hat{X}^{\nu}\hat{P}^{\mu} \quad , \tag{2.1.3}$$

der auf die Koordinaten der Felder wirkt. Die Generator-Matrizen $M^{\mu\nu}$ wirken dabei ausschließlich auf die Komponenten in den Tangentialräumen. Die Wirkung des Operators $\hat{X}^0$ definiert man dabei durch die Analogie

$$\hat{X}^k \left|m;\vec{x}\right\rangle = x^k \left|m;\vec{x}\right\rangle \quad \Longrightarrow \quad \hat{X}^0 \left|m;\vec{x}\right\rangle = x^0 \left|m;\vec{x}\right\rangle \quad . \tag{2.1.4}$$

Für die Ortsdarstellung bedeutet dies (k,l=1,2,3)

$$\begin{aligned}
\hat{B}^{kl}\int \eta(x)\,|m;\vec{x}\rangle d^3x &= \Big(\hat{X}^k\hat{P}^l - \hat{X}^l\hat{P}^k\Big)\int \eta(x)\,|m;\vec{x}\rangle d^3x \\
&= \Big(\hat{P}^l\hat{X}^k - \hat{P}^k\hat{X}^l\Big)\int \eta(x)\,|m;\vec{x}\rangle d^3x \\
&= \int \eta(x)\Big(\hat{P}^l\hat{X}^k\,|m;\vec{x}\rangle - \hat{P}^k\hat{X}^l\,|m;\vec{x}\rangle\Big)d^3x \\
&= \int \eta(x)\Big(x^k(-i\partial^l)\,|m;\vec{x}\rangle - x^l(-i\partial^k)\,|m;\vec{x}\rangle\Big)d^3x \\
&= \int \Big(i\partial^l\big(\eta(x)x^k\big) - i\partial^k\big(\eta(x)x^l\big)\Big)\,|m;\vec{x}\rangle d^3x \\
&= \int \Big(i\big(\partial^l\eta(x)\big)x^k - i\big(\partial^k\eta(x)\big)x^l\Big)\,|m;\vec{x}\rangle d^3x \\
&= \int \Big(\quad i\big(x^k\partial^l - x^l\partial^k\big)\eta(x)\quad\Big)\,|m;\vec{x}\rangle d^3x
\end{aligned}$$

und unter Ausnutzung der Schrödinger-Gleichung

$$\begin{aligned}
\hat{B}^{k0}\int \eta(x)\,|m;\vec{x}\rangle d^3x &= \Big(\hat{X}^k\hat{P}^0 - \hat{X}^0\hat{P}^k\Big)\int \eta(x)\,|m;\vec{x}\rangle d^3x \\
&= \Big(\hat{P}^0\hat{X}^k - \hat{P}^k\hat{X}^0\Big)\int \eta(x)\,|m;\vec{x}\rangle d^3x \\
&= \hat{P}^0\int \eta(x)\hat{X}^k\,|m;\vec{x}\rangle d^3x - \int \eta(x)\hat{P}^k\hat{X}^0\,|m;\vec{x}\rangle d^3x \\
&= i\partial^0\int \eta(x)x^k\,|m;\vec{x}\rangle d^3x - \int \eta(x)x^0(-i\partial^k)\,|m;\vec{x}\rangle d^3x \\
&= \int \Big(i\partial^0\big(\eta(x)x^k\big) - i\partial^k\big(\eta(x)x^0\big)\Big)\,|m;\vec{x}\rangle d^3x \\
&= \int \Big(i\big(\partial^0\eta(x)\big)x^k - i\big(\partial^k\eta(x)\big)x^0\Big)\,|m;\vec{x}\rangle d^3x \\
&= \int \Big(\quad i\big(x^k\partial^0 - x^0\partial^k\big)\eta(x)\quad\Big)\,|m;\vec{x}\rangle d^3x \quad .
\end{aligned}$$

Damit hat man insgesamt

$$\hat{B}^{\mu\nu}_{\text{ort}} = i\big(x^\mu\partial^\nu - ix^\nu\partial^\mu\big) \qquad . \tag{2.1.5}$$

Durch Überprüfung der Vertauschungsrelationen kann man die Konsistenz der Definition (2.1.4) verifizieren. Die Anwendung auf die Koordinatenfunktionen

liefert

$$\begin{aligned}\hat{B}^{\mu\nu}_{\text{ort}} x^\rho &= \Big(ix^\mu\partial^\nu - ix^\nu\partial^\mu\Big)x^\rho \\ &= ix^\mu\partial^\nu x^\rho - ix^\nu\partial^\mu x^\rho \\ &= ix^\mu g^{\nu\rho} - ix^\nu g^{\mu\rho} \\ &= i\big(g^{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma - g^{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma\big)x^\sigma \qquad . \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Formuliert man dies in der vektoriellen Form

$$\hat{B}^{\mu\nu}_{\text{ort}}\left(x^\rho\right) = \left(\hat{B}^{\mu\nu}_{\text{ort}} x^\rho\right) = B^{\mu\nu}_{4\times4}\left(x^\sigma\right) \tag{2.1.7}$$

kann man für den Minkowski-Raum

$$\left(B^{\mu\nu}_{4\times4}\right)^\rho{}_\sigma = i\big(g^{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma - g^{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma\big) = -\left(L^{\mu\nu}_{4\times4}\right)^\rho{}_\sigma \tag{2.1.8}$$

ablesen. Dies bedeutet

$$e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}B^{\mu\nu}_{4\times4}} \;=\; e^{-\frac{i}{2}(-\omega_{\mu\nu})L^{\mu\nu}_{4\times4}} \;=\; \Lambda^{-1} \qquad . \tag{2.1.9}$$

Damit liefert die Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned}\hat{U}(\omega)\int \eta(x)\,|m,\vec{x}\rangle d^3x &= \int\Big(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{B}^{\mu\nu}_{\text{ort}}}\,\eta(x)\Big)\,|m,\vec{x}\rangle d^3x \\ &= \int \eta(\Lambda^{-1}x)\,|m,\vec{x}\rangle d^3x \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

und man kann für die Wellenfunktion

$$\eta'(x) \;=\; \eta(\Lambda^{-1}x) \tag{2.1.11}$$

formulieren. Ausgehend von $x' = \Lambda x$ wird dies oftmals auch etwas irreführend entsprechend

$$\eta'(x') \;=\; \eta(x) \tag{2.1.12}$$

dargestellt. Man beachte dabei aber, dass trotz der suggestiven Schreibweise $\eta'(x')$ *nicht direkt* mit der Wellenfunktion in einem durch die Koordinaten x' definierten Bezugssystem identifiziert werden kann, da bei festem t' das räumliche Integral $\int |\eta'(x')|^2\, d^3x'$ über das Betragsquadrat wegen $d^3x' \neq d^3x$ (siehe nächste Seite) nicht auf 1 normiert ist.

2.2 Lorentz-Transformation des Bezugssystems

Seien zwei Bezugssysteme a und b gegeben, auf die bezogen sich ein Objektsystem (Koordinaten y) mit einer Geschwindigkeit v_a bzw. v_b bewegt. Nun führt die Lorentz-Transformation zu einer Längenkontraktion um den Faktor $1/\gamma$ in Bewegungsrichtung. Vom System a bzw. vom System b aus betrachtet folgt

$$\gamma_a \cdot d^3x = d^3y = \gamma_b \cdot d^3x' \quad , \tag{2.2.1}$$

woraus sich für die δ-Funktion

$$\delta^3(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \frac{d^3x'}{d^3x} \cdot \delta^3(\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2) = \frac{\gamma_a}{\gamma_b} \cdot \delta^3(\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2) \tag{2.2.2}$$

ergibt. Da die Ortseigenzustände auf eine δ-Funktion normiert sind, muss

$$\hat{U}_P(\omega, 0)\ |m, \vec{x}\rangle_a = \sqrt{\frac{\gamma_a}{\gamma_b}} \cdot\ |m, \vec{x}'\rangle_b \tag{2.2.3}$$

gelten. Ein im Objektsystem ruhendes Teilchen besitzt vom System mit v_a aus betrachtet den Impuls $\vec{p}$ und vom System mit v_b aus betrachtet den Impuls $\vec{p}'$. Dies bedeutet

$$E(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} = \frac{m}{\sqrt{1 - v_a^2}} = \gamma_a m \tag{2.2.4}$$

$$E(\vec{p}') = \sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} = \frac{m}{\sqrt{1 - v_b^2}} = \gamma_b m \tag{2.2.5}$$

und somit

$$\frac{\gamma_b}{\gamma_a} = \frac{E(\vec{p}')}{E(\vec{p})} \quad . \tag{2.2.6}$$

Geht man in ein neues Bezugssystems über, so ergibt sich für den Zustandsvektor eines Teilchens in einem Impulseigenzustand

$$\begin{aligned}
\hat{U}_P(\omega,0)\,|\eta;m,\vec{p}\rangle_a &= \hat{U}_P(\omega,0)\,e^{-iE(\vec{p})t}\,|m,\vec{p}\rangle_a \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int e^{-ipx}\cdot\hat{U}_P(\omega,0)\;|m,\vec{x}\rangle_a d^3x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int e^{-ip'x'}\cdot\sqrt{\frac{\gamma_a}{\gamma_b}}\;|m,\vec{x}'\rangle_b\cdot\frac{\gamma_b}{\gamma_a}\,d^3x' \\
&= \sqrt{\frac{\gamma_b}{\gamma_a}}\cdot e^{-iE(\vec{p}\,')t'}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int e^{i\vec{p}\,'\vec{x}'}\,|m,\vec{x}'\rangle_b\,d^3x' \\
&= \sqrt{\frac{E(\vec{p}\,')}{E(\vec{p})}}\cdot e^{-iE(\vec{p}\,')t'}\,|m,\vec{p}\,'\rangle_b \\
&= \sqrt{\frac{E(\vec{p}\,')}{E(\vec{p})}}\cdot\;|\eta';m,\vec{p}\,'\rangle_b \qquad . \qquad (2.2.7)
\end{aligned}$$

2.3 Translationen des Zustandsvektors

Bei Translationen gilt natürlich $|m,\vec{p}\rangle_a = |m,\vec{p}\rangle_b$, so dass die Impulseigenvektoren nicht unterschieden werden müssen. Im allgemeinen Fall ist der Zustandsvektor eines Systems bei scharfem Impuls

$$|\eta;m,\vec{p}\rangle = e^{-iE(\vec{p})(t-t_0)}\,|m,\vec{p}\rangle \qquad . \qquad (2.3.1)$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
\hat{U}_P(1,a)\,|\eta;m,\vec{p}\rangle &= e^{-iE(\vec{p})(t-t_0)}\;\hat{U}_P(1,a)\,|m,\vec{p}\rangle \\
&= e^{-iE(\vec{p})(t-t_0)}\;e^{+ipa}\,|m,\vec{p}\rangle \\
&= e^{+ipa}\;|\eta;m,\vec{p}\rangle \qquad . \qquad (2.3.2)
\end{aligned}$$

Nun gilt aber bei reinen Translationen für zeitliche Abstände

$$t-t_0 = t'-t'_0 \qquad . \qquad (2.3.3)$$

Dies bedeutet, dass dies auch entsprechend

$$\begin{aligned}\hat{U}_P(1,a)\,|\eta;m,\vec{p}\rangle &= e^{-iE(\vec{p})(t-t_0)}\; e^{+ipa}\,|m,\vec{p}\rangle \\ &= e^{-iE(\vec{p})(t'-t_0')}\; e^{+ipa}\,|m,\vec{p}\rangle \\ &= e^{+ipa}\;|\eta';m,\vec{p}\rangle \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

formuliert werden kann. Dabei ist es zweckmäßig, die Anfangsbedingung so zu wählen, dass sie in dem jeweils betrachteten System verschwindet.

2.4 Poincare-Transformation des Feldzustands

Für einen Basiszustand wird

$$\begin{aligned}&\hat{U}_P(\omega,a)\,|\Phi(x)\rangle_a \\ &= \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p})}}\cdot e^{ipx}\cdot \hat{U}_P(\omega,a)\,|\eta;m,\vec{p}\rangle_a\cdot d^3p \\ &= \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p})}}\cdot e^{ipx}\cdot e^{ip'a}\sqrt{\frac{2E(\vec{p}\,')}{2E(\vec{p})}}\;|\eta';m,\vec{p}\,'\rangle_b\cdot d^3p \\ &= \int (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{ipx+ip'a}\cdot\sqrt{2E(\vec{p}\,')}\,|\eta';m,\vec{p}\,'\rangle_b\cdot\frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \\ &= \int (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{ip'(\Lambda x)+ip'a}\cdot\sqrt{2E(\vec{p}\,')}\,|\eta';m,\vec{p}\,'\rangle_b\cdot\frac{d^3p'}{2E(\vec{p}\,')} \\ &= \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p}\,')}}\cdot e^{ip'(\Lambda x+a)}\cdot\;|\eta';m,\vec{p}\,'\rangle_b\cdot d^3p' \\ &= |\Phi(\Lambda x+a)\rangle_b \qquad ; \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

d.h. es gilt

$$|\Phi'(x)\rangle_a = |\Phi(x')\rangle_b \qquad . \tag{2.4.2}$$

Kapitel 3

Kopplungen mit Ableitungen

3.1 Vorbemerkungen

Um die Darstellung so einfach und übersichtlich wie möglich zu halten, wird in den folgenden beiden Abschnitten mit dem reellen Skalarfeld gearbeitet. Danach wird als explizites Beispiel das geladene Skalarfeld betrachtet. An den prinzipiellen Ergebnissen ändert dies nichts.

3.2 Wdh.: Die Störungsreihe

Im kanonischen Formalismus wird im Wechselwirkungsbild über die Störungsreihe für den Streuoperator die Beziehung

$$\begin{aligned}\hat{S}^{\mathrm{W}} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int\ldots\int T\left[\hat{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{W}}(x_1)\hat{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{W}}(x_2)\ldots\hat{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{W}}(x_n)\right]d^4x_1d^4x_2\ldots d^4x_n \\ &= T\left[\exp\left(-i\int\hat{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{W}}(x)d^4x\right)\right] \qquad (3.2.1)\end{aligned}$$

abgeleitet. Mit Hilfe der Wick-Theoreme lassen sich hieraus die Feynman-Regeln der zugrunde liegenden Theorie gewinnen. Ausgangspunkt ist dabei üblicherweise eine im Heisenberg-Bild formulierte Lagrange-Dichte

$$\hat{L}(x) = L_0\big(\hat{\Phi}^{\mathrm{H}}(x),\partial_\mu\hat{\Phi}^{\mathrm{H}}(x)\big)+L_1^{\mathrm{H}}\big(\hat{\Phi}^{\mathrm{H}}(x),\partial_\mu\hat{\Phi}^{\mathrm{H}}(x)\big) \quad . \qquad (3.2.2)$$

Der Übergang in das Wechselwirkungsbild wird durch den unitären Operator

$$\hat{U}(t) = e^{it\hat{H}_0^{\mathrm{H}}(t)} e^{-it\hat{H}^{\mathrm{H}}(t)} \quad \text{mit} \quad \hat{H}^{\mathrm{H}}(t) = \int \hat{\mathcal{H}}^{\mathrm{H}}(x)\, d^3x \tag{3.2.3}$$

vermittelt. Treten im Wechselwirkungsteil der Lagrange-Dichte keine zeitlichen Ableitungen auf, gilt einfach

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{W}}(x) &= \hat{U}(t)\, \hat{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{H}}(x)\, \hat{U}^{-1}(t) \\ &= -\hat{U}(t)\, L_1^{\mathrm{H}}\big(\hat{\Phi}^{\mathrm{H}}(x)\big)\, \hat{U}^{-1}(t) \quad = -L_1^{\mathrm{H}}\big(\hat{\Phi}^{\mathrm{W}}(x)\big) \quad . \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Der Wechselwirkungsteil $\hat{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{W}}$ des Hamilton-Operators entsteht dann also, indem man in die Funktion der Lagrange-Dichte L_1^{H} der wechselwirkenden Theorie die freien Felder einsetzt und das Vorzeichen anpasst. In diesem Fall folgt für den Streuoperator

$$\hat{S}^{\mathrm{W}} = T\left[\exp\left(\, i \int L_1^{\mathrm{H}}\big(\hat{\Phi}^{\mathrm{W}}(x)\big) d^4x\right)\right] \qquad . \tag{3.2.5}$$

Enthält der Wechselwirkungsterm dagegen Ableitungen, dann ist dieser Zusammenhang im Allgemeinen nicht mehr gegeben. Dies wird im Abschnitt „Skalare Quanten-Elektrodynamik“ explizit gezeigt.

3.3 Vergleich mit dem Pfadintegral

Auch Korrelationen lassen sich mittels der Störungsreihe berechnen. So erhält man für die n-Punkt Korrelationsfunktion eines wechselwirkenden Skalarfeldes:

$$\begin{aligned} &\langle\Omega|\, T\big[\hat{\Phi}(x_1)\cdots\hat{\Phi}(x_n)\big]\, |\Omega\rangle \\ &\quad = \frac{\langle 0|T\left[\hat{\Phi}^{\mathrm{W}}(x_1)\cdots\hat{\Phi}^{\mathrm{W}}(x_n)\exp\left(-i\int \hat{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{W}}(x)d^4x\right)\right]|0\rangle}{\langle 0|T\left[\exp\left(-i\int \hat{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{W}}(x)d^4x\right)\right]|0\rangle} \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Dabei bezeichnet $|\Omega\rangle$ das Vakuum in der wechselwirkenden Theorie, das sich im Allgemeinen von dem Vakuum $|0\rangle$ der freien Theorie unterscheidet. Durch die vorstehende Beziehung wird die n-Punkt Korrelationsfunktion der wechselwirkenden Theorie auf eine Berechnung mit nur freien Größen zurückgeführt.

Im Gegensatz zum kanonischen Formalismus führt der Pfadintegral-Ansatz die n-Punkt Korrelationsfunktion

$$\langle\Omega|T\big[\hat{\Phi}(x_1)\cdots\hat{\Phi}(x_n)\big]|\Omega\rangle$$
$$= \frac{\int \mathcal{D}\phi\;\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\exp\big(\,i\int L\big(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)\big)d^4x\big)}{\int \mathcal{D}\phi\;\exp\big(\,i\int L\big(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)\big)d^4x\big)} \qquad (3.3.2)$$

auf eine Berechnung mit Größen nur aus der klassischen Theorie ohne Operatoren zurück. Auf diesem Wege lassen sich die Feynman-Regeln der Theorie direkt aus der klassischen Lagrange-Dichte ableiten.

Die 2-Punkt Korrelationsfunktion $\langle 0|\,T\big[\hat{\Phi}^{\rm w}(x_1)\hat{\Phi}^{\rm w}(x_2)\big]\,|0\rangle$ ist identisch mit dem Feynman-Propagator. Für deren partielle Ableitung folgt

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu^{x_1}\langle 0|\,T\big[\hat{\Phi}^{\rm w}(x_1)\hat{\Phi}^{\rm w}(x_2)\big]\,|0\rangle \quad - \quad \langle 0|\,T\big[\partial_\mu^{x_1}\hat{\Phi}^{\rm w}(x_1)\hat{\Phi}^{\rm w}(x_2)\big]\,|0\rangle \\
&= \big(\,\partial_\mu^{x_1}\Theta(t_1-t_2)\,\big)\cdot\langle 0|\hat{\Phi}^{\rm w}(x_1)\hat{\Phi}^{\rm w}(x_2)|0\rangle \\
&\qquad\qquad + \big(\,\partial_\mu^{x_1}\Theta(t_2-t_1)\,\big)\cdot\langle 0|\hat{\Phi}^{\rm w}(x_2)\hat{\Phi}^{\rm w}(x_1)|0\rangle \\
&= g_{\mu 0}\delta(t_1-t_2)\cdot\langle 0|\hat{\Phi}^{\rm w}(x_1)\hat{\Phi}^{\rm w}(x_2)|0\rangle - g_{\mu 0}\delta(t_2-t_1)\cdot\langle 0|\hat{\Phi}^{\rm w}(x_2)\hat{\Phi}^{\rm w}(x_1)|0\rangle \\
&= g_{\mu 0}\delta(t_1-t_2)\cdot\langle 0|\,\big[\hat{\Phi}^{\rm w}(x_1),\hat{\Phi}^{\rm w}(x_2)\big]\,|0\rangle \quad = \quad 0 \qquad , \qquad (3.3.3)
\end{aligned}$$

da der Kommutator der Feldoperatoren für gleiche Zeiten verschwindet. Das vorstehende Ergebnis ausnutzend wird ganz analog

$$\begin{aligned}
&\partial_\nu^{x_2}\partial_\mu^{x_1}\langle 0|\,T\big[\hat{\Phi}^{\rm w}(x_1)\hat{\Phi}^{\rm w}(x_2)\big]\,|0\rangle \quad - \quad \langle 0|\,T\big[\partial_\mu^{x_1}\hat{\Phi}^{\rm w}(x_1)\partial_\nu^{x_2}\hat{\Phi}^{\rm w}(x_2)\big]\,|0\rangle \\
&= -g_{\nu 0}\delta(t_1-t_2)\cdot\langle 0|\partial_\mu^{x_1}\hat{\Phi}^{\rm w}(x_1)\hat{\Phi}^{\rm w}(x_2)|0\rangle \\
&\qquad\qquad + g_{\nu 0}\delta(t_2-t_1)\cdot\langle 0|\hat{\Phi}^{\rm w}(x_2)\partial_\mu^{x_1}\hat{\Phi}^{\rm w}(x_1)|0\rangle \\
&= -g_{\nu 0}\delta(t_1-t_2)\cdot\langle 0|\,\big[\partial_\mu^{x_1}\hat{\Phi}^{\rm w}(x_1),\hat{\Phi}^{\rm w}(x_2)\big]\,|0\rangle \\
&= -g_{\nu 0}\delta(t_1-t_2)\cdot\big(-ig_{\mu 0}\delta^3(\vec{x_1}-\vec{x_2})\big) \quad = \quad ig_{\mu 0}g_{\nu 0}\delta^4(x_1-x_2) \quad , \qquad (3.3.4)
\end{aligned}$$

wobei wiederum die Vertauschungsrelationen für gleiche Zeiten verwendet wurde. Wenn Ableitungen auftreten ist das zeitgeordnete Produkt T also keine kovariante Größe mehr. Nun ist aber andererseits das Pfadintegral auch bei

Auftreten von Ableitungen kovariant

$$\frac{\int \mathcal{D}\phi\, \partial_\mu^{x_1}\phi(x_1)\, \partial_\nu^{x_2}\phi(x_2)\, \exp\big(\, i\int L\big(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)\big)d^4x\big)}{\int \mathcal{D}\phi\, \exp\big(\, i\int L\big(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)\big)d^4x\big)}$$

$$= \partial_\mu^{x_1}\partial_\nu^{x_2}\left(\frac{\int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\, \phi(x_2)\, \exp\big(\, i\int L\big(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)\big)d^4x\big)}{\int \mathcal{D}\phi\, \exp\big(\, i\int L\big(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)\big)d^4x\big)}\right)$$

$$= \partial_\mu^{x_1}\partial_\nu^{x_2}\langle\Omega|T\big[\hat\Phi(x_1)\hat\Phi(x_2)\big]|\Omega\rangle \qquad . \tag{3.3.5}$$

Dies legt es nahe für beliebige Operatoren, die auch Ableitungen enthalten dürfen, ein durch die beiden Forderungen

$$T^*\big[\cdots\partial_\mu^{x_i}\hat O(x_i)\cdots\big] = \partial_\mu^{x_i}T^*\big[\cdots\hat O(x_i)\cdots\big] \tag{3.3.6}$$

$$T^*\big[\hat\Phi(x_1)\cdots\hat\Phi(x_n)\big] = T\big[\hat\Phi(x_1)\cdots\hat\Phi(x_n)\big] \tag{3.3.7}$$

definiertes modifiziertes zeitgeordnetes Produkt T^* einzuführen, mit dem dann

$$\langle\Omega|T^*\big[\hat O(x_1)\cdots\hat O(x_n)\big]|\Omega\rangle$$

$$= \frac{\int \mathcal{D}\phi\, O(x_1)\cdots O(x_n)\exp\big(\, i\int L\big(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)\big)d^4x\big)}{\int \mathcal{D}\phi\, \exp\big(\, i\int L\big(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)\big)d^4x\big)} \tag{3.3.8}$$

gilt und die Konsistenz sowie die Kovarianz sichergestellt wird.

Anmerkung: Es ist im Pfadintegral-Formalismus grundsätzlich mit dem zeitgeordnetem Produkt T^* zu arbeiten. In der Literatur wird dies aber oftmals nicht extra deutlich gemacht.

Nun entstehen die nicht kovarianten Terme im kanonische Formalismus durch den Übergang von der Lagrange-Dichte zur Hamilton-Dichte und weiter durch den Übergang vom Heisenberg-Bild in das Wechselwirkungsbild. Da aber die Theorie insgesamt kovariant ist, müssen sich entsprechende Terme im Zuge der Rechnungen gegenseitig aufheben. Für die n-Punkt Korrelationsfunktion im kanonischen Formalismus kann man hieraus schließen, dass übertragen auf beliebige Operatoren

$$\langle\Omega|\,T^*\big[\hat O(x_1)\cdots\hat O(x_n)\big]\,|\Omega\rangle$$

$$= \frac{\langle 0|T^*\left[\hat O^{\mathrm{W}}(x_1)\cdots\hat O^{\mathrm{W}}(x_n)\exp\left(i\int L_1^{\mathrm{H}}\big(\hat\Phi^{\mathrm{W}}(x),\partial_\mu\hat\Phi^{\mathrm{W}}(x)\big)d^4x\right)\right]|0\rangle}{\langle 0|T^*\left[\exp\left(i\int L_1^{\mathrm{H}}\big(\hat\Phi^{\mathrm{W}}(x),\partial_\mu\hat\Phi^{\mathrm{W}}(x)\big)d^4x\right)\right]|0\rangle} \tag{3.3.9}$$

sein muss, was sich im Sonderfall (3.2.4) korrekt auf (3.3.1) reduziert. Für den Streuoperator folgt die kovariante Darstellung

$$\hat{S}^{\mathrm{W}} = T^* \left[\exp\left(i \int L_1^{\mathrm{H}}\big(\hat{\Phi}^{\mathrm{W}}(x), \partial_\mu \hat{\Phi}^{\mathrm{W}}(x)\big) d^4x \right) \right] \quad . \tag{3.3.10}$$

Im kanonischen Formalismus sind die Feynman-Regeln also auch direkt aus dem Wechselwirkungsteil der Lagrange-Dichte ableitbar. Die zunächst ungewöhnlich erscheinende Identität

$$T\left[\exp\left(-i \int \hat{\mathcal{H}}_1^{\mathrm{W}}(x) d^4x \right) \right] = T^* \left[\exp\left(i \int L_1^{\mathrm{H}}\big(\hat{\Phi}^{\mathrm{W}}(x), \partial_\mu \hat{\Phi}^{\mathrm{W}}(x)\big) d^4x \right) \right] \tag{3.3.11}$$

soll am Beispiel der Quanten-Elektrodynamik des geladenen skalaren Feldes explizit verifiziert werden.

3.4 Skalare Quanten-Elektrodynamik

Zur möglichst übersichtlichen Schreibweise wird für die Ladung des Skalarfeldes $q = 1$ angenommen sowie die Normalordnung der Hamilton-Operatoren im Wechselwirkungsbild nicht explizit mitgeschrieben.

Die Skalare Quanten-Elektrodynamik wird in dem Heisenberg-Bild durch die Lagrange-Dichte

$$L = L_0^{SF} + L_0^{em} + L_1^{\mathrm{H}} \tag{3.4.1}$$

definiert, wobei

$$L_0^{SF} = \partial_\mu \hat{\Phi}_{\mathrm{H}}^\dagger \, \partial^\mu \hat{\Phi}_{\mathrm{H}} - m^2 \hat{\Phi}_{\mathrm{H}}^\dagger \hat{\Phi}_{\mathrm{H}} \tag{3.4.2}$$

für die freie Lagrange-Dichte des geladenen Skalarfeldes, L_0^{em} für die freie Lagrange-Dichte des elektromagnetische Feldes und

$$L_1^{\mathrm{H}} = ie \, \partial_\mu \hat{\Phi}_{\mathrm{H}}^\dagger \, \hat{\Phi}_{\mathrm{H}} \hat{A}_{\mathrm{H}}^\mu - ie \, \hat{\Phi}_{\mathrm{H}}^\dagger \, \partial_\mu \hat{\Phi}_{\mathrm{H}} \, \hat{A}_{\mathrm{H}}^\mu + e^2 \, \hat{\Phi}_{\mathrm{H}}^\dagger \hat{\Phi}_{\mathrm{H}} \hat{A}_\mu^{\mathrm{H}} \hat{A}_{\mathrm{H}}^\mu \tag{3.4.3}$$

für den Wechselwirkungsterm steht. Die Besonderheit hierbei ist, dass in diesem Wechselwirkungsterm zeitliche Ableitungen auftreten. Aus der Lagrange-Dichte ergeben sich für das Skalarfeld die kanonisch konjugierten Felder

$$\hat{\pi}_{\mathrm{H}} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \hat{\Phi}_{\mathrm{H}})} = \partial^0 \hat{\Phi}_{\mathrm{H}}^\dagger - ie \hat{A}_{\mathrm{H}}^0 \hat{\Phi}_{\mathrm{H}}^\dagger \tag{3.4.4}$$

$$\hat{\pi}_{\mathrm{H}}^\dagger = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \hat{\Phi}_{\mathrm{H}}^\dagger)} = \partial^0 \hat{\Phi}_{\mathrm{H}} + ie \hat{A}_{\mathrm{H}}^0 \hat{\Phi}_{\mathrm{H}} \quad . \tag{3.4.5}$$

Legendre-Transformation führt dann zu der Hamilton-Dichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\mathrm{H}} &= \hat{\pi}_{\mathrm{H}}\,\partial_0\hat{\Phi}_{\mathrm{H}} + \hat{\pi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\partial_0\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}} - \left(L_0^{SF} + L_0^{em} + L_1^{\mathrm{H}}\right)\\ &= \hat{\pi}_{\mathrm{H}}\,\partial_0\hat{\Phi}_{\mathrm{H}} + \hat{\pi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\partial_0\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}} - L_0^{em} - L_1^{\mathrm{H}}\\ &\qquad - \left(\partial_0\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\partial^0\hat{\Phi}_{\mathrm{H}} + \partial_i\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\partial^i\hat{\Phi}_{\mathrm{H}} - m^2\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\right) \qquad (3.4.6)\end{aligned}$$

Nutzt man $\partial_0 = \partial^0$ aus und ersetzt die zeitlichen Ableitungen mit Hilfe ihrer Beziehungen zu den kanonisch konjugierten Feldern, so erhält man:

$$\begin{aligned}&= \hat{\pi}_{\mathrm{H}}\left(\hat{\pi}^\dagger_{\mathrm{H}} - ie\hat{A}^0_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\right) + \hat{\pi}^\dagger_{\mathrm{H}}\left(\hat{\pi}_{\mathrm{H}} + ie\hat{A}^0_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\right) - L_0^{em} - L_1^{\mathrm{H}}\\ &\qquad - \left(\hat{\pi}_{\mathrm{H}} + ie\hat{A}^0_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\right)\left(\hat{\pi}^\dagger_{\mathrm{H}} - ie\hat{A}^0_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\right) - \partial_i\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\partial^i\hat{\Phi}_{\mathrm{H}} + m^2\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\\ &= \hat{\pi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\hat{\pi}_{\mathrm{H}} - L_0^{em} - L_1^{\mathrm{H}} - e^2(\hat{A}^0_{\mathrm{H}})^2\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}} - \partial_i\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\partial^i\hat{\Phi}_{\mathrm{H}} + m^2\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}} \qquad (3.4.7)\end{aligned}$$

Hieraus kann man den Wechselwirkungsteil

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1^{\mathrm{H}} &= -L_1^{\mathrm{H}} - e^2(\hat{A}^0_{\mathrm{H}})^2\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\\ &= -ie\,\partial_0\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\hat{A}^0_{\mathrm{H}} - ie\,\partial_i\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\hat{A}^i_{\mathrm{H}} + ie\,\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\partial_0\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\,\hat{A}^0_{\mathrm{H}} + ie\,\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\partial_i\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\,\hat{A}^i_{\mathrm{H}}\\ &\qquad - e^2\,\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\hat{A}^{\mathrm{H}}_\mu\hat{A}^\mu_{\mathrm{H}} - e^2(\hat{A}^0_{\mathrm{H}})^2\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}} \qquad (3.4.8)\end{aligned}$$

ablesen. Ersetzt man wiederum die zeitlichen Ableitungen mit Hilfe ihrer Beziehungen zu den kanonisch konjugierten Feldern, so erhält man die kanonische Form:

$$\begin{aligned}&= -ie\left(\hat{\pi}_{\mathrm{H}} + ie\hat{A}^0_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\right)\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\hat{A}^0_{\mathrm{H}} - ie\,\partial_i\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\hat{A}^i_{\mathrm{H}}\\ &\qquad + ie\,\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\left(\hat{\pi}^\dagger_{\mathrm{H}} - ie\hat{A}^0_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\right)\hat{A}^0_{\mathrm{H}} + ie\,\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\partial_i\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\,\hat{A}^i_{\mathrm{H}}\\ &\qquad\qquad - e^2\,\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\hat{A}^{\mathrm{H}}_\mu\hat{A}^\mu_{\mathrm{H}} - e^2(\hat{A}^0_{\mathrm{H}})^2\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\\ &= -ie\,\hat{\pi}_{\mathrm{H}}\,\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\hat{A}^0_{\mathrm{H}} - ie\,\partial_i\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\hat{A}^i_{\mathrm{H}}\\ &\qquad + ie\,\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\hat{\pi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\hat{A}^0_{\mathrm{H}} + ie\,\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\,\partial_i\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\,\hat{A}^i_{\mathrm{H}}\\ &\qquad\qquad - e^2\,\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}}\hat{A}^{\mathrm{H}}_\mu\hat{A}^\mu_{\mathrm{H}} + e^2(\hat{A}^0_{\mathrm{H}})^2\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{H}}\hat{\Phi}_{\mathrm{H}} \qquad (3.4.9)\end{aligned}$$

Da keine zeitlichen Ableitungen auftreten liefert der Übergang ins Wechselwirkungsbild den äquivalenten Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1^{\mathrm{W}} &= -ie\,\hat{\pi}_{\mathrm{W}}\,\hat{\Phi}_{\mathrm{W}}\hat{A}^0_{\mathrm{W}} - ie\,\partial_i\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{W}}\,\hat{\Phi}_{\mathrm{W}}\hat{A}^i_{\mathrm{W}}\\ &\qquad + ie\,\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{W}}\,\hat{\pi}^\dagger_{\mathrm{W}}\,\hat{A}^0_{\mathrm{W}} + ie\,\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{W}}\,\partial_i\hat{\Phi}_{\mathrm{W}}\,\hat{A}^i_{\mathrm{W}}\\ &\qquad\qquad - e^2\,\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{W}}\hat{\Phi}_{\mathrm{W}}\hat{A}^{\mathrm{W}}_\mu\hat{A}^\mu_{\mathrm{W}} + e^2(\hat{A}^0_{\mathrm{W}})^2\hat{\Phi}^\dagger_{\mathrm{W}}\hat{\Phi}_{\mathrm{W}} \qquad . \qquad (3.4.10)\end{aligned}$$

Nun sind die Feldoperatoren im Wechselwirkungsbild freie Operatoren. Dies bedeutet für die Beziehung zu den kanonischen Feldern

$$\hat{\pi}_{\mathrm{w}} = \partial_0 \hat{\Phi}^{\dagger}_{\mathrm{w}} \tag{3.4.11}$$

$$\hat{\pi}^{\dagger}_{\mathrm{w}} = \partial_0 \hat{\Phi}_{\mathrm{w}} \quad . \tag{3.4.12}$$

Dies eingesetzt liefert schließlich den Wechselwirkungsterm

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1^{\mathrm{w}} &= -ie\,\partial_0\hat{\Phi}^{\dagger}_{\mathrm{w}}\,\hat{\Phi}_{\mathrm{w}}\hat{A}^0_{\mathrm{w}} - ie\,\partial_i\hat{\Phi}^{\dagger}_{\mathrm{w}}\,\hat{\Phi}_{\mathrm{w}}\hat{A}^i_{\mathrm{w}} \\
&\quad + ie\,\hat{\Phi}^{\dagger}_{\mathrm{w}}\,\partial_0\hat{\Phi}_{\mathrm{w}}\,\hat{A}^0_{\mathrm{w}} + ie\,\hat{\Phi}^{\dagger}_{\mathrm{w}}\,\partial_i\hat{\Phi}_{\mathrm{w}}\,\hat{A}^i_{\mathrm{w}} \\
&\quad - e^2\,\hat{\Phi}^{\dagger}_{\mathrm{w}}\hat{\Phi}_{\mathrm{w}}\hat{A}^{\mathrm{w}}_{\mu}\hat{A}^{\mu}_{\mathrm{w}} + e^2(\hat{A}^0_{\mathrm{w}})^2\hat{\Phi}^{\dagger}_{\mathrm{w}}\hat{\Phi}_{\mathrm{w}} \\
&= -L_1^H\big(\hat{\Phi}^{\dagger}_{\mathrm{w}}, \hat{\Phi}_{\mathrm{w}}, \partial_\mu\hat{\Phi}^{\dagger}_{\mathrm{w}}, \partial_\nu\hat{\Phi}_{\mathrm{w}}, \hat{A}^{\sigma}_{\mathrm{w}}\big) + e^2(\hat{A}^0_{\mathrm{w}})^2\hat{\Phi}^{\dagger}_{\mathrm{w}}\hat{\Phi}_{\mathrm{w}}
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

für den Streuoperator. Verglichen mit (3.2.4) tritt ein normalenabhängiger Term auf, der die Kovarianz zu zerstören scheint.

3.5 Die Identität

In diesem Abschnitt wird ausschließlich im Wechselwirkungsbild gearbeitet und deshalb die besondere Kennzeichnung der Operatoren nicht mehr mitgeführt.

Entsprechend (3.3.11) verbleibt es, die Identität

$$T\left[\exp\left(i\int\Big(L_1^{\mathrm{H}}(\ldots) - e^2(\hat{A}^0)^2\hat{\Phi}^{\dagger}\hat{\Phi}\Big)d^4x\right)\right] = T^*\left[\exp\left(i\int L_1^{\mathrm{H}}(\ldots)d^4x\right)\right] \tag{3.5.1}$$

zu zeigen. Nun verschwindet für *gleiche Zeiten* der Kommutator

$$\begin{aligned}
\Big[L_1^{\mathrm{H}}(\ldots)\,,\,\hat{\Phi}^{\dagger}\hat{\Phi}\Big] &= \Big[ie\partial_0\hat{\Phi}^{\dagger}\,\hat{\Phi}\hat{A}^0 - ie\hat{\Phi}^{\dagger}\,\partial_0\hat{\Phi}\,\hat{A}^0\,,\,\hat{\Phi}^{\dagger}\hat{\Phi}\Big] \\
&= ie\Big[\hat{\pi}\,\hat{\Phi}\hat{A}^0 - \hat{\Phi}^{\dagger}\,\hat{\pi}^{\dagger}\hat{A}^0\,,\,\hat{\Phi}^{\dagger}\hat{\Phi}\Big] \\
&= ie\Big(\,\Big[\hat{\pi},\hat{\Phi}\Big]\hat{\Phi}\hat{A}^0\hat{\Phi}^{\dagger} - \hat{\Phi}^{\dagger}\Big[\hat{\pi}^{\dagger},\hat{\Phi}^{\dagger}\Big]\hat{A}^0\hat{\Phi}\,\Big) \\
&= ie\Big(-i\delta^3(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\,\hat{\Phi}\hat{A}^0\hat{\Phi}^{\dagger} + \hat{\Phi}^{\dagger}\,i\delta^3(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\,\hat{A}^0\hat{\Phi}\Big) \\
&= \quad 0 \qquad .
\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Zu gleichen Zeiten vertauschen ebenfalls die Komponenten des Maxwell-Feldes. Da bosonische Terme, die unterschiedliche Zeitparameter besitzen, im zeitgeordneten Produkt beliebig angeordnet werden dürfen wenn ihr Kommutator

für gleiche Zeiten verschwindet, kann man die Umformung

$$\begin{aligned} & T\left[\exp\left(i\int\left(L_1^{\mathrm{H}}(\ldots)-e^2(\hat{A}^0)^2\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi}\right)d^4x\right)\right] \\ & \quad = T\left[\exp\left(i\int L_1^{\mathrm{H}}(\ldots)d^4x\right)\exp\left(-i\int e^2(\hat{A}^0)^2\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi}d^4x\right)\right] \\ & \quad = T\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\left(\int L_1^{\mathrm{H}}(\ldots)d^4x\right)^n\cdot\exp\left(-i\int e^2(\hat{A}^0)^2\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi}d^4x\right)\right] \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

vornehmen. Die notwendige Auflösung von zeitgeordneten Produkten ist mit Hilfe der beiden Wick-Theoreme

1. Das zeitgeordnete Produkt lässt sich in eine Summe von Produkten mit Normalordnung entwickeln, deren einzelne Summanden alle möglichen Kontraktionen von je zwei Operatoren enthalten.

2. Für gemischte T-Produkte sind in der Entwicklung nach normalgeordneten Produkten alle die Terme fortzulassen, die Kontraktionen von bereits normalgeordneten Operatoren entsprechen.

möglich. Dabei ist zu beachten, dass im Wechselwirkungsbild jeder der Terme L_1^{H} normalgeordnet ist. Jede Kontraktion „verbraucht“ dann 2 Faktoren L_1^{H}. Jetzt soll zusammengestellt werden, welchen Beitrag die nur in L_1^{H} vorkommenden nicht kovarianten Anteile zu einem Term leisten, der nach Anwendung der Wick-Theoreme noch genau r Faktoren L_1^{H} enthält. r-Faktoren können aus $n = r + 2s$ Faktoren und genau s Kontraktionen entstehen. Nun gilt:

- Die $n = r + 2s$ Faktoren L_1^{H} treten mit einem Vorfaktor $\frac{i^{r+2s}}{(r+2s)!}$ auf.

- Es gibt genau $\binom{r+2s}{2s}$ Möglichkeiten diese $2s$ Faktoren auszuwählen.

- Die $2s$ Faktoren lassen sich auf genau

$$\frac{\binom{2s}{2}\binom{2s-2}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{s!} = \frac{(2s)!}{2^s s!}$$

  verschiedene Arten kontrahieren.

- Der nicht kovariante Anteil einer Kontraktion zweier Faktoren L_1^{H} ist

$$\left(T - T^*\right)\left[\int\int L_1^{\mathrm{H}}(x_1)L_1^{\mathrm{H}}(x_2)d^4x_1d^4x_2\right] \quad .$$

Aus der vorstehenden Zusammenstellung folgt

$$
\begin{aligned}
& T\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\left(\int L_1^{\mathrm{H}}(\ldots)d^4x\right)^n\cdot\exp\left(-i\int e^2(\hat{A}^0)^2\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi}d^4x\right)\right] \\
& \quad = T^*\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\left(\int L_1^{\mathrm{H}}(\ldots)d^4x\right)^n\cdot\exp\left(-i\int e^2(\hat{A}^0)^2\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi}d^4x\right)\right. \\
& \qquad + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\int L_1^{\mathrm{H}}(\ldots)d^4x\right)^r\cdot\exp\left(-i\int e^2(\hat{A}^0)^2\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi}d^4x\right) \\
& \qquad\qquad \cdot\frac{i^{(r+2s)}}{(r+2s)!}\cdot\binom{r+2s}{2s}\cdot\frac{(2s)!}{2^s s!} \\
& \qquad\qquad \left.\cdot\Big(\quad\Big(T-T^*\Big)\left[\int\int L_1^{\mathrm{H}}(x_1)L_1^{\mathrm{H}}(x_2)d^4x_1d^4x_2\right]\quad\Big)^s\right] \\
& \quad = T^*\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{i^r}{r!}\left(\int L_1^{\mathrm{H}}(\ldots)d^4x\right)^r\cdot\exp\left(-i\int e^2(\hat{A}^0)^2\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi}d^4x\right)\right. \\
& \qquad\qquad \left.\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\frac{i^{2s}}{2^s s!}\left(\int\int\Big(T-T^*\Big)\Big[L_1^{\mathrm{H}}(x_1)L_1^{\mathrm{H}}(x_2)\Big]\,d^4x_1d^4x_2\;\right)^s\right].
\end{aligned}
\tag{3.5.4}
$$

Weiter wird

$$
\begin{aligned}
& \Big(T-T^*\Big)\Big[\,L_1^{\mathrm{H}}(x_1)L_1^{\mathrm{H}}(x_2)\,\Big] \\
& \quad = \Big(T-T^*\Big)\Big[\,e^2\,\partial_0^{x_1}\hat{\Phi}^\dagger(x_1)\,\hat{\Phi}(x_1)\hat{A}^0(x_1)\,\hat{\Phi}^\dagger(x_2)\,\partial_0^{x_2}\hat{\Phi}(x_2)\,\hat{A}^0(x_2) \\
& \qquad\qquad -e^2\,\hat{\Phi}^\dagger(x_1)\,\partial_0^{x_1}\hat{\Phi}(x_1)\,\hat{A}^0(x_1)\,\partial_0^{x_2}\hat{\Phi}^\dagger(x_2)\,\hat{\Phi}(x_2)\hat{A}^0(x_2)\,\Big] \\
& \quad = e^2\,\hat{\Phi}(x_1)\hat{A}^0(x_1)\,\hat{\Phi}^\dagger(x_2)\,\hat{A}^0(x_2)\,\langle 0|\Big(T-T^*\Big)\Big[\,\partial_0^{x_1}\hat{\Phi}^\dagger(x_1)\partial_0^{x_2}\hat{\Phi}(x_2)\,\Big]|0\rangle \\
& \qquad - e^2\,\hat{\Phi}^\dagger(x_1)\,\hat{A}^0(x_1)\,\hat{\Phi}(x_2)\hat{A}^0(x_2)\,\langle 0|\Big(T-T^*\Big)\Big[\,\partial_0^{x_1}\hat{\Phi}(x_1)\partial_0^{x_2}\hat{\Phi}^\dagger(x_2)\,\Big]|0\rangle \\
& \quad = e^2\,\hat{\Phi}(x_1)\hat{A}^0(x_1)\,\hat{\Phi}^\dagger(x_2)\,\hat{A}^0(x_2)\Big(\,-i\,g_{00}\,g_{00}\,\delta^4(x_1-x_2)\,\Big) \\
& \qquad - e^2\,\hat{\Phi}^\dagger(x_1)\,\hat{A}^0(x_1)\,\hat{\Phi}(x_2)\hat{A}^0(x_2)\Big(\,+i\,g_{00}\,g_{00}\,\delta^4(x_1-x_2)\,\Big) \\
& \quad = -2ie^2\,\hat{\Phi}(x_1)\hat{A}^0(x_1)\,\hat{\Phi}^\dagger(x_2)\,\hat{A}^0(x_2)\,\delta^4(x_1-x_2) \qquad .
\end{aligned}
\tag{3.5.5}
$$

Dies bedeutet

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^{2s}}{2^s s!} \left(\int\int \Big(T - T^*\Big)\Big[L_1^{\mathrm{H}}(x_1) L_1^{\mathrm{H}}(x_2)\Big] d^4x_1 d^4x_2 \right)^s \\
&\quad = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2^s s!} \left(\int\int -2ie^2\, \hat{\Phi}(x_1)\hat{A}^0(x_1)\hat{\Phi}^\dagger(x_2)\hat{A}^0(x_2)\delta^4(x_1-x_2) d^4x_1 d^4x_2 \right)^s \\
&\quad = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \left(\int e^2 (\hat{A}^0)^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi}\, d^4x \right)^s \\
&\quad = \exp\left(+i \int e^2 (\hat{A}^0)^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} d^4x \right) \qquad . \qquad (3.5.6)
\end{aligned}$$

Setzt man die vorstehenden Teilergebnisse in die Gleichung (3.5.3) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
&T\left[\exp\left(i \int \Big(L_1^{\mathrm{H}}(\ldots) - e^2 (\hat{A}^0)^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} \Big) d^4x \right) \right] \\
&\quad = T\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left(\int L_1^{\mathrm{H}}(\ldots) d^4x \right)^n \cdot \exp\left(-i \int e^2 (\hat{A}^0)^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} d^4x \right) \right] \\
&\quad = T^*\left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{i^r}{r!} \left(\int L_1^{\mathrm{H}}(\ldots) d^4x \right)^r \cdot \exp\left(-i \int e^2 (\hat{A}^0)^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} d^4x \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^{2s}}{2^s s!} \left(\int\int \Big(T - T^*\Big)\Big[L_1^{\mathrm{H}}(x_1) L_1^{\mathrm{H}}(x_2)\Big] d^4x_1 d^4x_2 \right)^s \right] \\
&\quad = T^*\left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{i^r}{r!} \left(\int L_1^{\mathrm{H}}(\ldots) d^4x \right)^r \cdot \exp\left(-i \int e^2 (\hat{A}^0)^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} d^4x \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \cdot \exp\left(+i \int e^2 (\hat{A}^0)^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} d^4x \right) \right] \\
&\quad = T^*\left[\exp\left(i \int L_1^{\mathrm{H}}(\ldots) d^4x \right) \right] \qquad , \qquad (3.5.7)
\end{aligned}$$

was die zu zeigende Identität verifiziert.

Kapitel 4

Einfluss der Mischung der Generationen

Der unterschiedliche Einfluss der CKM-Matrix verglichen mit dem der PMNS-Matrix, die ja eine Mischung der Quark- bzw. der Lepton-Generationen bewirken, wird am Beispiel der Lebensdauern von Myon und Neutron aufgezeigt. Für die Berechnung der Lebensdauern sei auf die umfangreiche Literatur hierzu verwiesen.

4.1 Die Lebensdauer vom Myon

Die Lebensdauern der Elementarteilchen sind eine Konsequenz der schwachen Wechselwirkung und können im Standardmodell der Teilchenphysik berechnet werden. Der Zerfall des Myons erfolgt über den Prozess

$$\mu \quad \longrightarrow \quad \nu'_\mu + e^- + \bar{\nu}'_e \qquad . \tag{4.1.1}$$

Man beachte, dass die schwache Wechselwirkung an die mit einem $'$ gekennzeichneten gemischten Neutrino-Zustände koppelt. Für die Lebensdauer eines Myons ergibt sich

$$\tau_\mu^{-1} = \frac{m_\mu^5}{192\pi^3}\, G_F^2 \quad \Longrightarrow \quad \tau_\mu \approx 2.2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} \tag{4.1.2}$$

mit der Fermi-Konstanten (in natürlichen Einheiten)

$$G_F = \frac{\pi\, \alpha_w(m_W)}{\sqrt{2}\, m_W^2} = 1.166 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2} \qquad . \tag{4.1.3}$$

Bei der Berechnung der Fermi-Konstanten ist zu beachten, dass diese bei der Energie m_W definiert ist; d.h. auch die schwache Kopplungskonstante $\alpha_w(m_W) = 0.034$ bei dieser Energie anzuwenden ist.

4.2 Die Lebensdauer vom Neutron

Ein d-Quark zerfällt über den schwachen Prozess

$$d \quad \longrightarrow \quad u + e^- + \bar{\nu}'_e \qquad . \tag{4.2.1}$$

Der Zerfall des Neutrons, dass ja aus einem u-Quark und zwei d-Quarks aufgebaut ist, erfolgt durch die Umwandlung eines der d-Quarks in ein u-Quark. Für die Lebensdauer des Neutrons ergibt sich in erster Ordnung der Störungstheorie

$$\tau_n^{-1} = 1.715 \cdot \frac{m_e^5}{2\pi^3} \; |V_{ud}|^2 \; G_F^2 \left(1 + 3\lambda_{AV}^2\right) \quad \Longrightarrow \quad \tau_n \approx 907.6\,\mathrm{s} \tag{4.2.2}$$

mit dem CKM-Matrixelement $V_{ud} = 0.974$ und dem Verhältnis der axialen zur vektoriellen Kopplung $\lambda_{AV} = g_A/g_V = 1.274$. Die so ermittelte Lebensdauer entspricht dem experimentellen Wert bis auf 2.5%. Eine genauere Analyse erfordert die Berücksichtigung von mehr Details des Zerfalls.

4.3 Kurze Erläuterung

In die Berechnung der Lebensdauer des Neutrons geht das CKM-Matrixelement ein, während in die Berechnung der Lebensdauer des Myons das äquivalente PMNS-Matrixelement nicht eingeht. Die Ursache liegt in der Mischung der Generationen und deren Massen. Die an der schwachen Wechselwirkung teilnehmenden Zustände sind die gemischten Zustände

$$|\nu'_\mu\rangle = V_{\nu_e\mu} \; |\nu_e\rangle + V_{\nu_\mu\mu} \; |\nu_\mu\rangle + V_{\nu_\tau\mu} \; |\nu_\tau\rangle \tag{4.3.1}$$

$$|u'\rangle = V_{ud} \; |u\rangle + V_{cd} \; |c\rangle + V_{td} \; |t\rangle \qquad . \tag{4.3.2}$$

Da die Massen der drei Neutrinos sehr viel kleiner sind als die Masse des Myons, kann das Myon in alle drei Neutrinos zerfallen. Im Gegensatz hierzu sind die Massen des c-Quarks und des t-Quarks wesentlich größer als die Masse des d-Quarks. Das d-Quark kann deshalb im Neutron (d.h. ohne Energiezufuhr) nur in das u-Quark zerfallen. Dessen Anteil am gemischten Zustand ist aber gerade $|V_{ud}|^2$.

Kapitel 5

Das Wasserstoff-Atom

Am Beispiel des Energiespektrums lässt sich sehr gut zeigen, dass die Dirac-Gleichung eine bessere Beschreibung des Wasserstoff-Atoms liefert als die Schrödinger-Gleichung. Für Detailrechnungen hierzu sei auf die umfangreiche Literatur verwiesen. Eine sehr gute Darstellung findet sich in [Sle07]. Die genaue spektroskopische Messung des Energiespektrums des Wasserstoff-Atoms zeigt zudem, dass auch die Dirac-Gleichung nur eine Approximation darstellt.

5.1 Anwendung der Schrödinger-Gleichung

Die zeitabhängige nicht-relativistische Schrödinger-Gleichung ohne Berücksichtigung des Spins des Elektrons ist

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m_e}\Delta\Psi + V\Psi \tag{5.1.1}$$

mit der potentiellen Energie im Zentralfeld

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi r} \quad . \tag{5.1.2}$$

Dabei ist in Kugelkoordinaten der Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\hat{L}^2 \tag{5.1.3}$$

mit dem Quadrat des Bahndrehimpulsoperators

$$\hat{L}^2 = -\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \quad . \tag{5.1.4}$$

Da das Potential zeitunabhängig ist, folgt für gebundene Zustände die allgemeine Lösung

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum c_n \Psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t} \quad , \tag{5.1.5}$$

wobei die Funktionen $\Psi_n(\vec{r})$ die Eigenwertgleichung

$$-\frac{1}{2m_e}\Delta\Psi_n(\vec{r}) + V(r)\Psi_n(\vec{r}) = E_n\Psi_n(\vec{r}) \tag{5.1.6}$$

erfüllen müssen. Mit den Eigenfunktionen des Bahndrehimpulsoperators

$$\hat{L}^2 Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta,\phi) \tag{5.1.7}$$

für die diskreten Werte des Bahndrehimpulses

$$\ell = 0,1,2,\ldots \qquad \text{sowie} \qquad -\ell \le m \le \ell \tag{5.1.8}$$

und dem Ansatz

$$\Psi_{n\ell m}(\vec{r}) = \frac{1}{r}\cdot u_n(r)\, Y_{\ell m}(\theta,\phi) \tag{5.1.9}$$

folgt durch Trennung der Variablen für die radiale Funktion

$$-\frac{1}{2m_e}\frac{d^2u_n(r)}{dr^2} + \left(V(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{2m_e\, r^2}\right) u_n(r) = -E_n u_n(r) \quad . \tag{5.1.10}$$

Mit dem Volumenelemente $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ folgt die Normierung

$$\begin{aligned} 1 &= \int |\Psi_n|^2\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \\ &= \int |u_n|^2\, dr \int |Y_{\ell m}|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \int |u_n|^2\, dr \quad . \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Die Eigenwertgleichung (5.1.10) besitzt nur Lösungen für die diskreten Werte

$$E_n = -\frac{Z^2}{2m_e a^2}\cdot\frac{1}{n^2} \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{4\pi}{m_e e^2} \tag{5.1.12}$$

mit der Hauptquantenzahl $n = n_r + \ell$ und $n_r = 1,2,\ldots$.

5.2 Zusätzliche Störungsrechnungen

Nach der zeitunabhängigen Störungsrechnung führt eine kleine Störung der potentiellen Energie im Hamilton-Operator

$$\hat{V}' = V + \hat{H}_i \tag{5.2.1}$$

in erster Ordnung zu den geänderten Energieeigenwerten

$$E'_n \simeq E_n + \langle \Psi_{n\ell m} | \hat{H}_i | \Psi_{n\ell m} \rangle \tag{5.2.2}$$

des Wasserstoff-Atoms (Z=1). Nachstehend sollen die Korrekturen durch

- die relativistische Energie und
- der Spin-Bahn-Kopplung

betrachtet werden.

Die Korrektur aufgrund der relativistischen Energie führt für $p \ll m_e$ und der Entwicklung

$$E_{kin} = \sqrt{m_e^2 + p^2} - m_e \simeq \frac{p^2}{2m_e} - \frac{p^4}{8m_e^3} \tag{5.2.3}$$

zu dem zusätzlichen Term

$$\hat{H}_r = -\frac{\hat{P}^4}{8m_e^3} \tag{5.2.4}$$

im nicht-relativistischem Hamilton-Operator. Dies bedeutet unter Berücksichtigung der ungestörten Schrödinger-Gleichung für die Energiekorrektur

$$\begin{aligned}
E_r =& \langle \Psi_{n\ell m} | \hat{H}_r | \Psi_{n\ell m} \rangle \\
=& -\frac{1}{8m_e^3} \langle \Psi_{n\ell m} | \hat{P}^4 | \Psi_{n\ell m} \rangle \\
=& -\frac{1}{8m_e^3} \langle \Psi_{n\ell m} | \hat{P}^2 \, \hat{P}^2 | \Psi_{n\ell m} \rangle \\
=& -\frac{1}{8m_e^3} \langle \Psi_{n\ell m} | \left(2m_e (E_n - V) \right)^2 | \Psi_{n\ell m} \rangle \\
=& -\frac{1}{2m_e} \langle \Psi_{n\ell m} | \, E_n^2 - 2E_n V + V^2 \, | \Psi_{n\ell m} \rangle \\
=& -\frac{1}{2m_e} \left(E_n^2 + \frac{2E_n e^2}{4\pi} \langle \Psi_{n\ell m} | \, 1/r \, | \Psi_{n\ell m} \rangle + \frac{e^4}{(4\pi)^2} \langle \Psi_{n\ell m} | \, 1/r^2 \, | \Psi_{n\ell m} \rangle \right)
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Die Korrektur aufgrund der Spin-Bahnkopplung ergibt sich aus der Bewegung des Elektrons im elektrischen Feld des Kerns

$$\vec{E} = \frac{+e}{4\pi r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \qquad . \tag{5.2.6}$$

In seinem Ruhesystem sieht das Elektron mit $v \ll c = 1$ dann die magnetische Feldstärke

$$\vec{B}_{\text{Ruhe}} = \frac{\vec{E} \times \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \simeq \vec{E} \times \vec{v} \qquad . \tag{5.2.7}$$

Dies führt nach der Pauli-Gleichung mit dem gyromagnetischen Faktor $g_e = 2$ des Elektrons zu dem Hamilton-Operator der Spin-Bahn-Kopplung

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{SB}}^{\text{Ruhe}} &= -g_e \, \frac{-e}{2m_e} \Big(\vec{S} \cdot \vec{B}_{\text{Ruhe}} \Big) \\ &= \frac{e^2}{4\pi m_e r^3} \Big(\vec{S} \cdot \big(\vec{r} \times \vec{v} \big) \Big) \\ &= \frac{e^2}{4\pi m_e^2 r^3} \Big(\vec{S} \cdot \vec{L} \Big) \qquad . \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Die Rücktransformation auf das Ruhesystems des Atomkerns liefert unter Beachtung eines zusätzlichen Faktors $1/2$ aufgrund der sogenannten Thomas-Präzession schließlich

$$\hat{H}_{\text{SB}} = \frac{e^2}{8\pi m_e^2 r^3} \Big(\vec{S} \cdot \vec{L} \Big) \qquad . \tag{5.2.9}$$

Mit den Drehimpulseigenvektoren $|j, \ell, s\rangle$ wird die Energiekorrektur

$$\begin{aligned} E_{\text{SB}} &= \langle j, \ell, s | \, \langle \Psi_{n\ell m} | \hat{H}_{\text{SB}} | \Psi_{n\ell m} \rangle \, | j, \ell, s \rangle \\ &= \frac{e^2}{8\pi m_e^2} \, \langle j, \ell, s | \, \vec{S} \cdot \vec{L} \, | j, \ell, s \rangle \, \langle \Psi_{n\ell m} | \, \frac{1}{r^3} \, | \Psi_{n\ell m} \rangle \qquad . \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Nun ist

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \Big(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2 \Big) \tag{5.2.11}$$

und damit

$$E_{\text{SB}} = \frac{e^2}{16\pi m_e^2} \Big(j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1) \Big) \cdot \langle \Psi_{n\ell m} | \, \frac{1}{r^3} \, | \Psi_{n\ell m} \rangle \, . \tag{5.2.12}$$

Für die weitere Auswertung der Korrekturen sind die Erwartungswerte

$$\begin{aligned}\langle\Psi_{n\ell m}|1/r|\Psi_{n\ell m}\rangle &= \frac{1}{an^2}\\ \langle\Psi_{n\ell m}|1/r^2|\Psi_{n\ell m}\rangle &= \frac{1}{a^2n^3(\ell+1/2)}\\ \langle\Psi_{n\ell m}|1/r^3|\Psi_{n\ell m}\rangle &= \frac{1}{a^3n^3\ell(\ell+1/2)(\ell+1)}\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

zu verwenden, die sich mit Hilfe der sogenannten Kramers-Relation und dem Feynman-Hellmann-Theorem bestimmen lassen. Damit wird mit der Feinstrukturkonstanten $\alpha = e^2/4\pi$ die Summe dieser beiden Korrekturen

$$\begin{aligned}E_{\rm FS} &= E_r + E_{\rm SB}\\ &= -\frac{1}{2m_e}\left(E_n^2 + \frac{2E_ne^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{an^2} + \frac{e^4}{(4\pi)^2}\frac{1}{a^2n^3(\ell+1/2)}\right)\\ &\qquad + \frac{e^2}{16\pi m_e^2}\cdot\frac{j(j+1)-\ell(\ell+1)-s(s+1)}{a^3n^3\ell(\ell+1/2)(\ell+1)}\\ &= -E_n\cdot\frac{\alpha^2}{n^2}\left(-\frac{1}{4}+1-\frac{n}{\ell+1/2}\right)\\ &\qquad - E_n\cdot\frac{\alpha^2}{n^2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{j(j+1)-\ell(\ell+1)-s(s+1)}{\ell(\ell+1/2)(\ell+1)}\\ &= -E_n\cdot\frac{\alpha^2}{n^2}\cdot f(n,j,\ell,s)\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

mit der Hilfsfunktion

$$f(n,j,\ell,s) = \frac{3}{4} - \frac{n}{\ell+1/2} + \frac{n}{2}\cdot\frac{j(j+1)+\ell(\ell+1)-s(s+1)}{\ell(\ell+1/2)(\ell+1)} \quad . \tag{5.2.15}$$

Nun ist der Spin des Elektrons $s = 1/2$ und damit sind quantenmechanisch die möglichen Werte des Gesamtdrehimpulses

- für $\ell = 0$: $\quad j = s = 1/2 \qquad$ und
- für $\ell \neq 0$: $\quad j = \ell \pm s = \ell \pm 1/2 \qquad$.

Durch Einsetzten dieser Werte kann man für alle drei Fälle die Gültigkeit der Beziehung

$$f(n,j,\ell,1/2) = \frac{3}{4} - \frac{n}{j+1/2} \tag{5.2.16}$$

verifizieren. Dies führt schließlich zu der Feinstrukturformel

$$E'_n = E_n \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{3}{4} - \frac{n}{j+1/2}\right)\right) \tag{5.2.17}$$

für das Wasserstoff-Atom. Die Feinstruktur hebt die Entartung in ℓ auf und die Korrektur der Energie ist in der Größenordnung von α^2.

5.3 Anwendung der Dirac-Gleichung

Bringt man die freie Dirac-Gleichung in die Form

$$i\,\partial^0\Psi(x) = \gamma^0\big(\,\vec{\gamma}\cdot\hat{\vec{P}} + m_e\,\big)\Psi(x) \qquad , \tag{5.3.1}$$

so kann man für die Wellenfunktion bei Vorliegen eines Potentials den Hamilton-Operator

$$\hat{H}_\Psi = \gamma^0\big(\,\vec{\gamma}\cdot\hat{\vec{P}} + m_e\,\big) + V \tag{5.3.2}$$

ablesen. Für die weiteren Schritte ist es zweckmäßig einen radialen Impuls-operator

$$\hat{P}_r = \frac{1}{r}\left(\vec{r}\cdot\hat{\vec{P}} - i\right) = -i\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) \qquad , \tag{5.3.3}$$

eine radiale Matrix

$$\alpha_r = \frac{\gamma^0}{r}\,\big(\,\vec{\gamma}\cdot\vec{r}\,\big) \tag{5.3.4}$$

sowie die Drehimpuls-Matrix

$$\hat{K} = \gamma^0\,\big(\,2\vec{S}\cdot\vec{L} + 1\,\big) \tag{5.3.5}$$

einzuführen. Dabei ist

$$\vec{S} = \begin{pmatrix}\Sigma^{23}\\ \Sigma^{31}\\ \Sigma^{12}\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{L} = \vec{r}\times\hat{\vec{P}} \qquad , \tag{5.3.6}$$

wobei $\Sigma^{\mu\nu}$ für die Erzeugenden der Spinor-Transformation steht. Hieraus lässt sich der Zusammenhang

$$\hat{K}^2 = \Big(\,\vec{S} + \vec{L}\,\Big)^2 + \frac{1}{4} = \hat{\vec{J}}^{\,2} + \frac{1}{4} \tag{5.3.7}$$

ableiten, woraus die Eigenwerte

$$k^2 = j(j+1) + \frac{1}{4} = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \tag{5.3.8}$$

folgen. Dies bedeutet

$$k = \pm\left(j + \frac{1}{2}\right) = \pm 1, \pm 2, \ldots \quad . \tag{5.3.9}$$

Mit diesen Umformungen kann man den Hamilton-Operator (5.3.2) dann in der radialen Form

$$\hat{H}_\Psi = \alpha_r \hat{P}_r + \frac{i\alpha_r\gamma^0\hat{K}}{r} + m_e\gamma^0 + V(r) \tag{5.3.10}$$

darstellen, was für die gebundenen Zustände zu der Eigenwertgleichung

$$\left(\alpha_r \hat{P}_r + \frac{ik}{r}\,\alpha_r\gamma^0 + m_e\gamma^0 + V(r)\right)\Psi(r) = E^D\Psi(r) \tag{5.3.11}$$

führt. Unter Verwendung der Standarddarstellung der γ-Matrizen ist diese Eigenwertgleichung mit dem Ansatz

$$\Psi(r) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} F(r) \\ F(r) \\ G(r) \\ G(r) \end{pmatrix} \tag{5.3.12}$$

für ein kugelsymmetrisches Potential exakt lösbar. Der ziemlich aufwendige Lösungsweg liefert die möglichen Energieeigenwerte

$$E^D_{n',k} = \frac{m_e}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\left(n' + \sqrt{k^2 - \alpha^2}\right)^2}}} \tag{5.3.13}$$

$$\text{mit} \qquad n' = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{und} \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots \quad .$$

Hieraus ergibt sich schließlich die relativistische Bindungsenergie

$$E_{n',k} = E^D_{n',k} - m_e \quad . \tag{5.3.14}$$

5.4 Vergleich der Ergebnisse

In der Ordnung α^2 wird die relativistische Bindungsenergie

$$\begin{aligned} E^{\alpha^2}_{n',k} &= \frac{m_e}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\left(n'+\sqrt{k^2}\right)^2}}} - m_e \\ &\simeq \frac{m_e}{1+\frac{\alpha^2}{2\left(n'+|k|\right)^2}} - m_e \\ &\simeq -\frac{m_e\alpha^2}{2\left(n'+|k|\right)^2} \quad . \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Der Vergleich mit dem nicht-relativistischen Wert

$$E_n = -\frac{1}{2m_e a^2}\cdot\frac{1}{n^2} = -\frac{m_e\alpha^2}{2n^2} \tag{5.4.2}$$

führt zu der Identifikation

$$n = n' + |k| = n' + j + \frac{1}{2} \quad . \tag{5.4.3}$$

In der nächsten Ordnung α^4 kommt entsprechend der Taylor-Reihe mit den Identifikationen (5.4.3) und (5.4.2) zusätzlich der Term

$$\begin{aligned} E^{\alpha^4}_{n',k} &= \frac{\alpha^4}{2}\cdot\frac{d^2E_{n',k}}{d(\alpha^2)^2}\bigg|_{\alpha^2=0} \\ &= -\frac{\alpha^4}{2}\cdot\frac{m_e}{\left(n'+|k|\right)^4}\left(\frac{n'+|k|}{|k|}-\frac{3}{4}\right) \\ &= -\frac{\alpha^4}{2}\cdot\frac{m_e}{n^4}\left(\frac{n}{j+1/2}-\frac{3}{4}\right) \\ &= E_n\cdot\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+1/2}-\frac{3}{4}\right) \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

hinzu. Der Vergleich mit (5.2.17) zeigt, dass

$$E_{\mathrm{FS}} = E^{\alpha^4}_{n',k} \tag{5.4.5}$$

ist. Die nicht-relativistische Korrektur aufgrund der Feinstruktur ergibt sich aus dem Term in zweiter Ordnung von α^2 des relativistischen Energieeigenwertes.

5.5 Die Hyperfeinstruktur

Der Zustand $1S_{1/2}$ mit $\ell = 0$ sowie $j = s = 1/2$ ist nach der Dirac-Gleichung entartet. Tatsächlich wurde bei genauen spektroskopischen Messungen aber festgestellt, dass eine Linienaufspaltung mit einer Energiedifferenz entsprechend [Hel70]

$$f_{\mathrm{HFS}} = \frac{\Delta E_{\mathrm{HFS}}}{2\pi\hbar} = 1420.406\,\mathrm{MHz} \tag{5.5.1}$$

vorliegt. Dies ist die sogenannte $\lambda = c/f = 21\,\mathrm{cm}$-Linie des Wasserstoffs, die von Wasserstoff-Wolken in der Galaxis abgestrahlt wird und sehr gut beobachtet werden kann, da die Strahlung Staubwolken problemlos durchdringt.

Eine entsprechende Hyperfeinstruktur tritt bei allen Energieniveaus auf. Die Ursache der Hyperfeinstruktur ist die Kopplung des magnetischen Moments des Kerns mit dem magnetischen Feld und dem magnetischen Moment des Elektrons; d.h. auch das Proton (der Kern) ist als relativistisches Teilchen zu behandeln. Im obigen Fall des $1S_{1/2}$ Zustandes ist nur die Kopplung

$$\hat{H}_{\mathrm{HFS}} = -\vec{\mu}_p \cdot \vec{B}_e = -g_p \, \frac{q_p e}{2m_p} \Big(\vec{I}_p \cdot \vec{B}_e \Big) \tag{5.5.2}$$

zum magnetischen Feld $\vec{B}_e$ des Elektrons relevant. Dabei ist $g_p = 5.586$ der gyromagnetischen Faktor, m_p die Masse und $\vec{I}_p$ der Spin des Protons. Die Dichte des magnetischen Moments des Elektrons

$$\vec{m}_e(r) = |\Psi_{100}(r)|^2 \; \vec{\mu}_e = |\Psi_{100}(r)|^2 \; g_e \, \frac{q_e e}{2m_e} \, \vec{S}_e \tag{5.5.3}$$

ist kugelsymmetrisch, da wegen $\ell = 0$ kein Bahndrehimpuls vorliegt. Nun kann $|\Psi_{100}(r)|^2$ über den sehr kleinen Radius des Protons praktisch als konstant angesehen werden; d.h. das Proton sieht eine konstante kugelsymmetrische Magnetisierung. Dann folgt aus der klassischen Elektrodynamik

$$\vec{B}_e = \frac{2}{3} \, \vec{m}_e(0) \qquad . \tag{5.5.4}$$

Dies alles eingesetzt liefert mit $q_e = -1$, $q_p = +1$ sowie $\vec{F} = \vec{I}_p + \vec{S}_e$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\mathrm{HFS}} &= |\Psi_{100}(0)|^2 \; \frac{g_e g_p e^2}{6 m_e m_p} \Big(\vec{I}_p \cdot \vec{S}_e \Big) \\ &= |\Psi_{100}(0)|^2 \; \frac{g_e g_p e^2}{6 m_e m_p} \cdot \frac{1}{2} \Big(\vec{F}^{\,2} - \vec{I}_p^{\,2} - \vec{S}_e^{\,2} \Big) \qquad , \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

woraus sich analog wie vorher die Energiekorrektur

$$E_{\mathrm{HFS}} = |\Psi_{100}(0)|^2 \; \frac{g_e g_p e^2}{6 m_e m_p} \cdot \frac{1}{2}\Big(f(f+1) - i(i+1) - s(s+1) \Big) \tag{5.5.6}$$

ergibt. In dem hier betrachtetem Fall ist $i = s = 1/2$ und damit $f = 0$ oder $f = 1$. Es folgt

$$E_{\mathrm{HFS}}(f=0) = +\frac{1}{4}\, A \tag{5.5.7}$$

$$E_{\mathrm{HFS}}(f=1) = -\frac{3}{4}\, A \tag{5.5.8}$$

mit der Aufspaltung

$$A = |\Psi_{100}(0)|^2 \; \frac{g_e g_p e^2}{6 m_e m_p} \qquad \Longrightarrow \qquad f_A = 1420.870\,\mathrm{MHz} \quad . \tag{5.5.9}$$

Dabei wurde $|\Psi_{100}(0)|^2 = 1/(\pi a^3)$ mit dem Bohr-Radius $a = 0.5292 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$ verwendet. Der Wert von f_A steht trotz der sehr einfachen Modellbildung in guter Übereinstimmung mit der experimentell gemessenen Aufspaltung (5.5.1).

5.6 Weitere Effekte

Experimentell stellt man noch einige mit der Dirac-Theorie nicht erklärbare Abweichungen fest. So folgt aus der Dirac-Gleichung für das Elektron der gyromagnetische Faktor $g_e = 2$, während sich experimentell [Cod18]

$$g_e|_{\mathrm{exp}} = 2 \cdot \big(\, 1 + 0.001\,159\,652\,180\,73 \, \big) \tag{5.6.1}$$

ergibt. Weiter sollten nach der Feinstrukturformel

$$E'_n = E_n \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{j+1/2} \right) \right) \tag{5.6.2}$$

die beiden Zustände

- $2S_{1/2}$ mit $n = 2, \ell = 0, j = 1/2$
- $2P_{1/2}$ mit $n = 2, \ell = 1, j = 1/2$

die gleiche Energie besitzen. Die beiden Zustände sind jedoch so verschoben, dass sich eine Aufspaltung (der sogenannte Lamb-Shift) von [Cod18]

$$LS|_{\mathrm{exp}} = \frac{\delta E_{2S_{1/2}} - \delta E_{2P_{1/2}}}{2\pi\hbar} = +1057.830\,\mathrm{Mhz} \tag{5.6.3}$$

ergibt. Die Ursache dieser Abweichungen von der Dirac-Theorie liegt darin begründet, dass die Dirac-Theorie der QED auf Baumebene entspricht und damit keine Vakuumfluktuationen mit virtuellen Teilchen berücksichtigt. Berücksichtigt man diese, so ergeben sich die theoretischen Werte [Aoy19, Yer18]

$$g_e|_{\text{theo}} = 2 \cdot \left(1 + 0.001\,159\,652\,181\,606 \right) \tag{5.6.4}$$

$$LS|_{\text{theo}} = +1057.834\,\text{Mhz} \qquad . \tag{5.6.5}$$

Theorie und Experiment befinden sich in ausgezeichneter Übereinstimmung. Die vorstehenden Beispiele zeigen den Gültigkeitsbereich der reinen Dirac-Gleichung auf und halfen der QED allgemein akzeptiert zu werden.

5.7 Zusammenfassung

Am Wasserstoff-Atom lässt sich sehr gut die schrittweise Verbesserung der Theorien zu seiner Beschreibung aufzeigen.

- Ausgehend von der nicht-relativistischen Schrödinger-Gleichung ergibt sich die Grobstruktur der Energieniveaus.
- Anwendung der relativistischen Dirac-Gleichung für das Elektron liefert die sogenannte Feinstruktur.
- Berücksichtigt man zusätzlich die Wechselwirkung mit dem Spin des Atomkerns, dem Proton, ergibt sich die Hyperfeinstruktur.
- Der verbleibenden Lamb-Shift der Energieniveaus wird erst durch Anwendung der vollen QED erklärt.

Auf der folgende Seite ist zum besseren Verständnis das Energieschema der tiefliegenden Zustände des Wasserstoff-Atoms nochmals grafisch dargestellt.

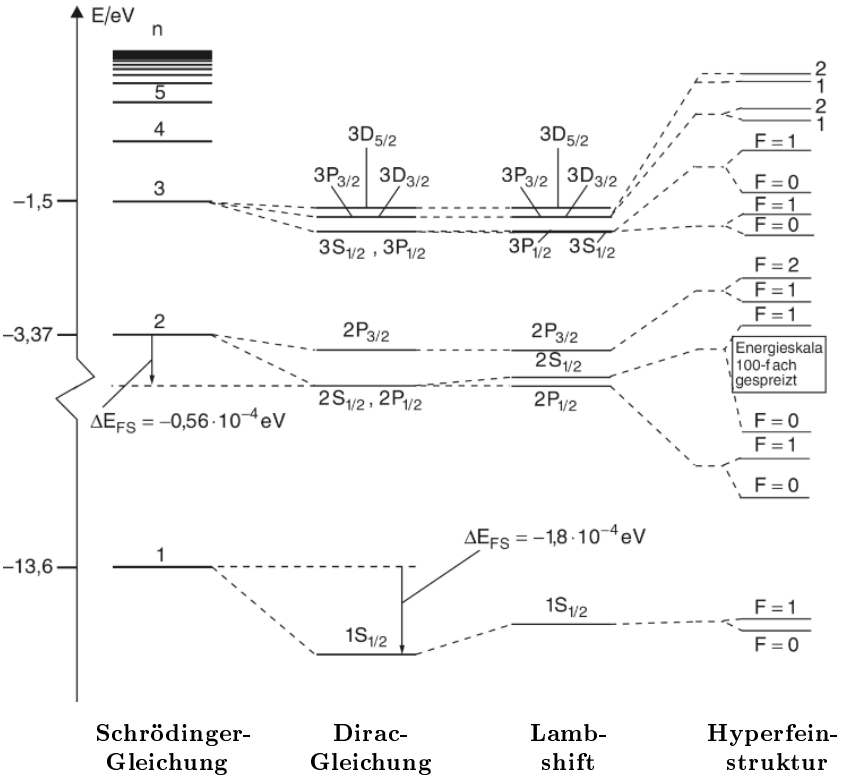


Abbildung 5.1: Termschema des Wasserstoff-Atoms

Kapitel 6

Das magnetische Moment des Elektrons

Die Berechnung des Lamb-Shifts sowie des magnetische Momentes haben in der 1940er Jahren wesentlich zur Akzeptanz der QED geführt. Speziell am magnetischen Moment kann man die Notwendigkeit des Übergangs von der relativistischen Quantenmechanik mit Wellenfunktion zur QED mit Operatoren zeigen, ohne den komplexen Apparat der Renormierung berücksichtigen zu müssen.

6.1 Der gyromagnetische Faktor

Das magnetische Moment eines Teilchens wird durch den sogenannten gyromagnetischen Faktor charakterisiert. Für dessen Definition ist es sinnvoll das Wasserstoff-Atom zu betrachten. Aus der Schrödinger-Gleichung folgen die Eigenfunktionen

$$\Psi_{nlm} = \frac{u(r)}{r} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \frac{u(r)}{r} P_\ell^{|m|}(\vartheta) e^{im\varphi} \tag{6.1.1}$$

des Wasserstoff-Atoms, zu denen jeweils eine elektrische Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{ieq_e}{2m_e} \Big(\big(\vec{\nabla}\Psi^\dagger\big)\Psi - \Psi^\dagger\big(\vec{\nabla}\Psi\big) \Big) \tag{6.1.2}$$

gehört. In Kugelkoordinaten gilt dabei

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \quad . \tag{6.1.3}$$

Da in den Eigenfunktionen Ψ_{nlm} die r- und ϑ-Komponenten nur reell auftreten, liefern sie keinen Beitrag zur Stromdichte in ihre Richtungen. Die Stromdichte durch das Elektron in φ-Richtung wird mit obigen Beziehungen (Achtung: die magnetische Quantenzahl m nicht mit der Masse m_e verwechseln)

$$j_\varphi = -\frac{e\,m}{m_e r \sin\vartheta}\,|\Psi_{nlm}|^2 \quad , \tag{6.1.4}$$

wobei $q_e = -1$ eingesetzt wurde. Ein Stromfaden mit dem Querschnitt $d\sigma$ dieses kreisförmigen Stroms erzeugt das magnetische Moment

$$\begin{aligned} d\mu_\varphi &= j_\varphi\, A d\sigma \;=\; j_\varphi\, \pi (r\sin\vartheta)^2 d\sigma \\ &= -\frac{e\,m}{2m_e}\;|\Psi_{nlm}|^2\;2\pi r\sin\vartheta d\sigma \quad = \quad -\frac{e\,m}{2m_e}\;|\Psi_{nlm}|^2\;dV \quad . \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

Da das Betragsquadrat der Eigenfunktionen im Volumen auf 1 normiert ist, liefert Integration

$$\mu_\varphi = -\frac{e\,m}{2m_e} \quad . \tag{6.1.6}$$

Der Betrag des kleinsten von Null verschiedenen Wertes ($m = 1$), das sogenannte Bohr'sche Magneton, wird als Basis für das durch den Spin bedingte magnetische Moment verwendet und man definiert durch die Beziehung

$$\vec{\mu}_e = g_e\, q_e\, \mu_B\, \vec{S} = g_e\, q_e\, \frac{e}{2m_e}\, \vec{S} \tag{6.1.7}$$

den gyromagnetischen Faktor g des Elektrons. Die getroffene Vorzeichenwahl führt zu $g_e > 0$. Oftmals wird in der Literatur auch das umgekehrte Vorzeichen gewählt, was dann zu $g_e < 0$ führt. Der Betrag $|g_e|$ ist hiervon natürlich unabhängig.

6.2 Dirac-Gleichung vs. QED

Anmerkung: Die Masse des Elektrons wird ab hier einfach mit m bezeichnet und nicht mehr mit einem Index gekennzeichnet und die Spin-Komponente der Spinoren $u(\vec{p}, \sigma)$ aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht mitgeschrieben.

In der relativistischen Quantenmechanik gehorcht die Wellenfunktion eines Elektrons der Dirac-Gleichung

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\,\Psi(x) = eq_e \cdot \gamma_\mu A^\mu(x)\Psi(x) \qquad , \tag{6.2.1}$$

aus der sich die nicht-relativistische Pauli-Gleichung

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\mathrm{P}}(x) = \left(-\frac{1}{2m}\left(-\vec{\nabla} + ieq_e\vec{A}\right)^2 - \frac{eq_e}{2m}\,\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right) + eq_eA^0\right)\Psi_{\mathrm{P}}(x) \tag{6.2.2}$$

ableiten lässt [End09]. Der Index P kennzeichnet die in der Pauli-Gleichung modifizierten Größen. Dies bedeutet

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{P;mag}} &= -\frac{eq_e}{2m}\,\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right) = -\frac{eq_e}{m}\,\left(\vec{S}_{\mathrm{P}}\cdot\vec{B}\right) \\ &\stackrel{!}{=} \quad -\vec{\mu}_e\cdot\vec{B} \quad = -g_eq_e\,\frac{e}{2m}\,\left(\vec{S}_{\mathrm{P}}\cdot\vec{B}\right) \qquad . \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Da das magnetische Moment im Ruhesystem definiert ist, kann man aus der Pauli-Gleichung für das Elektron in der Dirac-Theorie das magnetische Moment

$$g_e|_{\mathrm{Dirac}} = \frac{-\frac{eq_e}{m}}{-q_e\,\frac{e}{2m}} = 2 \tag{6.2.4}$$

ablesen. Dieses Ergebnis ist jetzt mit dem Ergebnis, das sich aus der vollen QED ergibt, zu vergleichen.

Hierzu ist es zweckmäßig ein Elektron in einem *konstanten externen* Magnetfeld $\vec{B}_{\mathrm{ke}}$ zu betrachten. Vom Feldstärketensor sind dann nur die Komponenten

$$\vec{B}_{\mathrm{ke}} = \begin{pmatrix} F^{32} \\ F^{13} \\ F^{21} \end{pmatrix}_{\mathrm{ke}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad B^i_{\mathrm{ke}} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{0ijk}F^{jk}_{\mathrm{ke}} \tag{6.2.5}$$

von Null verschieden $\left(\epsilon^{0123} = 1\right)$. Damit folgt im Wechselwirkungsbild für den Hamilton-Operator

$$\hat{H}_1 = eq_e \int \hat{\overline{\Psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\Psi}(x)A^\mu_{\mathrm{ke}}(x)d^3x \quad , \tag{6.2.6}$$

der keine Erzeugung oder Vernichtung von Photonen berücksichtigt, da ein externes Feld vorliegt. Die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Impulseigenzuständen wird mit der Abkürzung $c(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}/\sqrt{2E(\vec{p})}$

$$\begin{aligned} W_{p'p} &= \langle\eta; m, \vec{p}\,', \sigma|\hat{H}_1|\eta; m, \vec{p}, \sigma\rangle \\ &= eq_e \int c(p')e^{ip'x}\,\overline{u}(\vec{p}\,')\gamma_\mu u(\vec{p})\,e^{-ipx}c(p)\;\; A^\mu_{\mathrm{ke}}(x)d^3x \qquad . \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Im Wechselwirkungsbild erfüllen die Spinoren die freie Dirac-Gleichung; d.h. mit $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ gilt die Gordon-Zerlegung

$$\overline{u}(\vec{p}\,')\gamma_\mu u(\vec{p}) = \frac{1}{2m}\,\overline{u}(\vec{p}\,')\,(p'_\mu + p_\mu)\,u(\vec{p}) + \frac{i}{2m}\,\overline{u}(\vec{p}\,')\,\sigma_{\mu\nu}(p'^\nu - p^\nu)\,u(\vec{p}) \quad . \tag{6.2.8}$$

Dies bedeutet mit $q^\nu = p'^\nu - p^\nu$

$$W_{p'p} = \frac{eq_e}{2m}\int c(p')e^{ip'x}\,\overline{u}(\vec{p}\,')\,(p'_\mu + p_\mu)\,u(\vec{p})\,e^{-ipx}c(p)\;\; A^\mu_{\rm ke}(x)d^3x + \frac{ieq_e}{2m}\int c(p')e^{ip'x}\,\overline{u}(\vec{p}\,')\,\sigma_{\mu\nu}q^\nu\,u(\vec{p})\,e^{-ipx}c(p)\;\; A^\mu_{\rm ke}(x)d^3x\,. \tag{6.2.9}$$

Wegen $q^\nu e^{i(p'-p)x} = (-i)\partial^\nu e^{i(p'-p)x}$ ergibt sich für den zweiten Term

$$\begin{aligned} W_{p'p;}|_{\rm Term\ 2} &= \frac{ieq_e}{2m}\int(-i)\partial^\nu\Big(c(p')e^{ip'x}\,\overline{u}(\vec{p}\,')\,\sigma_{\mu\nu}\,u(\vec{p})\,e^{-ipx}c(p)\Big)\,A^\mu_{\rm ke}(x)d^3x \\ &= \frac{ieq_e}{2m}\int c(p')e^{ip'x}\,\overline{u}(\vec{p}\,')\,\sigma_{\mu\nu}\,u(\vec{p})\,e^{-ipx}c(p)\Big(i\partial^\nu A^\mu_{\rm ke}(x)\Big)d^3x \\ &= \frac{ieq_e}{2m}\int c(p')e^{ip'x}\,\overline{u}(\vec{p}\,')\,\sigma_{\mu\nu}\,u(\vec{p})\,e^{-ipx}c(p)\,\left(-\frac{i}{2}\,F^{\mu\nu}_{\rm ke}\right)d^3x \end{aligned}$$

und weiter bei einem reinen Magnetfeld

$$= \frac{eq_e}{2m}\int c(p')e^{ip'x}\,\overline{u}(\vec{p}\,')\,\sigma_{ij}\,u(\vec{p})\,e^{-ipx}c(p)\,\frac{1}{2}\,F^{ij}_{\rm ke}d^3x \quad . \tag{6.2.10}$$

Bezeichnet $\Sigma_{\mu\nu}$ die Erzeugenden der Spinor-Transformation, dann gilt für den Spinoperator im Ruhesystem

$$\vec{S} = \begin{pmatrix}\Sigma_{23}\\ \Sigma_{31}\\ \Sigma_{12}\end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad S^i = \frac{1}{2}\,\epsilon^{0ijk}\Sigma_{jk} \quad\Longleftrightarrow\quad \Sigma_{jk} = -\epsilon_{0ijk}S^i\,. \tag{6.2.11}$$

Nun ist $\sigma_{\mu\nu} = 2\Sigma_{\mu\nu}$, so dass schließlich

$$\begin{aligned} W_{p'p}|_{\rm Term\ 2} &= \frac{eq_e}{2m}\int c(p')e^{ip'x}\,\overline{u}(\vec{p}\,')\,\big(-2\epsilon_{0kij}S^k\big)\,u(\vec{p})\,e^{-ipx}c(p)\;\frac{1}{2}\,F^{ij}_{\rm ke}d^3x \\ &= -\frac{eq_e}{m}\int c(p')e^{ip'x}\,\overline{u}(\vec{p}\,')\,S^k\,u(\vec{p})\,e^{-ipx}c(p)\;\frac{1}{2}\,\epsilon_{0kij}\,F^{ij}_{\rm ke}d^3x \\ &= -\frac{eq_e}{m}\int c(p')e^{ip'x}\,\overline{u}(\vec{p}\,')\,S^k\,u(\vec{p})\,e^{-ipx}c(p)\,d^3x\,B^k_{\rm ke} \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

folgt. Baut man aus den Wellenfunktionen der Impulseigenzustände nun jeweils eine volle Wellenfunktion im Ortsraum auf, führt dies zu

$$\begin{aligned} V_{\text{mag}} &= -\frac{eq_e}{m} \int \overline{\Psi}(x) S^k \Psi(x) d^3x \, B^k_{\text{ke}} \\ &= -\frac{eq_e}{m} \left\langle \vec{S} \right\rangle \cdot \vec{B}_{\text{ke}} \qquad . \end{aligned} \tag{6.2.13}$$

Vergleich mit (6.2.3) zeigt, dass der zweite Term in (6.2.9) wie die Dirac-Gleichung einen gyromagnetischen Faktor von 2 bedeutet.

Betrachtet man nun die Feynman-Amplitude mit dem externen Magnetfeld auf Baumebene

$$M_{fi}^{\text{Baum}} = -ieq_e \, \overline{u}(\vec{p}\,') \gamma_\mu u(\vec{p}) \, A^\mu_{\text{ke}}(q) \qquad , \tag{6.2.14}$$

dann wird mit wiederum der Gordon-Zerlegung für diese

$$\begin{aligned} iM_{fi}^{\text{Baum}} = &\frac{eq_e}{2m} \, \overline{u}(\vec{p}\,') \, (p'_\mu + p_\mu) \, u(\vec{p}) \, A^\mu_{\text{ke}}(q) \\ &+ \frac{ieq_e}{2m} \, \overline{u}(\vec{p}\,') \, \sigma_{\mu\nu} q^\nu \, u(\vec{p}) \, A^\mu_{\text{ke}}(q) \qquad . \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

Vergleich mit (6.2.9) zeigt, dass das magnetische Moment der Dirac-Gleichung sich aus dem zweiten Term der Feynman-Amplitude auf Baumebene ergibt. Wegen der weiteren Feynman-Diagramme höherer Ordnung ist aber ein von 2 abweichender Wert des gyromagnetischen Faktors zu erwarten!

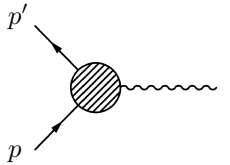
Messungen der Hyperfeinstruktur des Wasserstoffs 1947 gaben erste Hinweise darauf, dass der gyromagnetische Faktor von dem Wert $g_e|_{\text{Dirac}} = 2$ abweicht [Lau99]. Die Abweichung ist durch die Strahlungskorrekturen der QED erklärbar. Bereits 1948 wurde dann der erste Näherungswert ($\alpha = e^2/4\pi$)

$$\frac{g_e}{2} = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2) \approx 1 + 0.001\,162 \tag{6.2.16}$$

berechnet [Sch48].

6.3 Der Vertexfaktor mit Strahlungskorrekturen

Unter Berücksichtigung der Strahlungskorrekturen kann man für den Elektron-Photon-Vertex den allgemeinen Ansatz ($q_e = -1$)



$$\Longrightarrow \quad iM_{fi} = -e\,\overline{u}(\vec{p}\,')\Gamma^{\mu}(p',p)u(\vec{p})\,iD^{F}_{\mu\nu}(q)$$

Abbildung 6.1: Elektron-Photon-Vertex mit Strahlungskorrekturen

treffen. Da $\Gamma^{\mu}(p',p)$ sich wie ein Vektor transformieren muss, kann er nur eine Linearkombination der Vektorgrößen γ^{μ}, p'^{μ} und p^{μ} sein

$$\Gamma^{\mu}(p',p) = A\gamma^{\mu} + Bp'^{\mu} + Cp^{\mu} \qquad . \tag{6.3.1}$$

Theoretisch könnten noch Terme mit γ^5 auftreten. Diese Terme würden aber die Parität verletzen und ihr Koeffizient muss deshalb verschwinden.

Aus der sogenannten Ward-Identität

$$\overline{u}(\vec{p}\,')\; q_{\mu}\Gamma^{\mu}(p',p)\; u(\vec{p}) = 0 \tag{6.3.2}$$

ergibt sich wegen $p'_{\mu}p'^{\mu} = p_{\mu}p^{\mu} = m^2$ und Ausnutzung der Dirac-Gleichungen (6.4.16) sowie (6.4.17) im Impulsraum

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{u}(\vec{p}\,')\Big(Aq_{\mu}\gamma^{\mu} + Bq_{\mu}p'^{\mu} + Cq_{\mu}p^{\mu}\Big)u(\vec{p}) \\
&= A\,\Big(\,\overline{u}(\vec{p}\,')p'_{\mu}\gamma^{\mu}\,u(\vec{p}) - \overline{u}(\vec{p}\,')\,p_{\mu}\gamma^{\mu}u(\vec{p})\,\Big) \\
&\qquad + \overline{u}(\vec{p}\,')\Big(\,Bp'_{\mu}p'^{\mu} - Bp_{\mu}p'^{\mu} + Cp'_{\mu}p^{\mu} - Cp_{\mu}p^{\mu}\,\Big)u(\vec{p}) \\
&= A\,\Big(\,\overline{u}(\vec{p}\,')m\,u(\vec{p}) - \overline{u}(\vec{p}\,')\,mu(\vec{p})\,\Big) \\
&\qquad + \overline{u}(\vec{p}\,')\Big(\,Bp'_{\mu}p'^{\mu} - Bp_{\mu}p'^{\mu} + Cp'_{\mu}p^{\mu} - Cp_{\mu}p^{\mu}\,\Big)u(\vec{p}) \\
&= \overline{u}(\vec{p}\,')\,\big(B-C\big)\big(m^2 - p_{\mu}p'^{\mu}\big)\,u(\vec{p}) \\
&= \overline{u}(\vec{p}\,')\,\big(B-C\big)q_{\mu}p'^{\mu}\,u(\vec{p}) \qquad .
\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Da bei einer Wechselwirkung $q_{\mu}p'^{\mu} \neq 0$ ist, muss $B = C$ sein. Es folgt

$$\Gamma^{\mu}(p',p) = A\gamma^{\mu} + B\big(p'^{\mu} + p^{\mu}\big) \qquad . \tag{6.3.4}$$

Weiter ist der einzige nicht triviale Skalar q^2 (das Photon muss nicht on-shell sein) und aus dimensionaler Betrachtung folgt, dass die Koeffizienten damit

nur Funktionen von $s = q^2/m^2$ sein können. Ersetzt man nun noch die Summe $p'^\mu + p^\mu$ mit Hilfe der Gordon-Identität, erhält man schließlich die endgültige Darstellung

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(s) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(s) \tag{6.3.5}$$

mit den beiden noch unbekannten Formfaktoren F_1 und F_2. Auf Baumebene ist $F_1 = 1$ und $F_2 = 0$. Da $\Gamma^\mu(p', p)$ immer zwischen den Spinoren $\bar{u}$ und u steht, führt der Formfaktor F_1 zu einer Renormierung der nicht beobachtbaren Kopplungskonstanten und wird beim Übergang zur messbaren Kopplungskonstanten absorbiert, was nach der Renormierung immer $F_1^r(0) = 1$ bedeutet. Da das magnetische Moment nicht-relativistisch definiert ist, folgt durch Vergleich mit (6.2.14) und (6.2.15) für den gyromagnetischen Faktor

$$\frac{g_e}{2} = F_1^r(0) + F_2(0) = 1 + F_2(0) \qquad . \tag{6.3.6}$$

Dieser ist also über den Formfaktor $F_2(0)$ berechenbar. Das anomale magnetische Moment findet seinen Ausdruck in diesem Term.

6.4 Der Formfaktor in zweiter Ordnung

Eine Warnung vorweg: Die Rechnung ist zwar im Prinzip einfach, aber ziemlich langwierig und es sind einige typische Tricks notwendig. Mit dem Ansatz

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu(p', p) \tag{6.4.1}$$

folgt aus dem zugehörigen Feynman-Diagramm in Abbildung 6.2

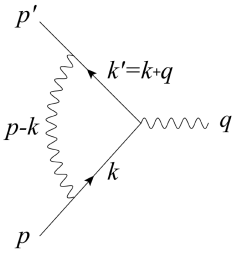


Abbildung 6.2: Vertexkorrektur 2.Ordnung

die Vertexkorrektur

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^\mu(p',p) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, iD^F_{\rho\nu}(p-k)\,(-ieq_e)\,\gamma^\nu\, iS_F(k')\,\gamma^\mu\, iS_F(k)\,(-ieq_e)\,\gamma^\rho \\ &= ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \frac{-g_{\rho\nu}\,\gamma^\nu\,(k'_\sigma\gamma^\sigma + m)\,\gamma^\mu\,(k_\kappa\gamma^\kappa + m)\,\gamma^\rho}{\big((p-k)^2+i\epsilon\big)\big(k'^2-m^2+i\epsilon\big)\big(k^2-m^2+i\epsilon\big)} \quad .\end{aligned} \tag{6.4.2}$$

Hieraus ist der für das anomale magnetische Moment verantwortlich Term

$$\bar u(\vec p\,')\,\delta\Gamma^\mu(p',p)\big|_{\rm mag}\,u(\vec p) = \bar u(\vec p\,')\,F_2(s)\,\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\,u(\vec p) \tag{6.4.3}$$

zwischen den beiden Spinoren zu isolieren. Die Anwendung der sogenannten Feynman-Parametrisierung

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 dx\,dy\,dz\,\frac{2\delta(x+y+z-1\,)}{(xA+yB+zC)^3} \tag{6.4.4}$$

liefert für den Nenner des obigen Integrals die Darstellung

$$\frac{1}{N} = \int_0^1 dx\,dy\,dz\,\frac{2\delta(x+y+z-1\,)}{D^3} \tag{6.4.5}$$

mit (unter Ausnutzung von $x+y+z=1\,$)

$$\begin{aligned} D &= x\big(k^2-m^2+i\epsilon\big) + y\big(k'^2-m^2+i\epsilon\big) + z\big((p-k)^2+i\epsilon\big) \\ &= x\big(k^2-m^2\big) + y\big(k^2+2k\cdot q+q^2-m^2\big) + z\big(p^2-2k\cdot p+k^2\big) \\ &\qquad + \big(x+y+z\big)i\epsilon \\ &= \big(k^2+2yk\cdot q-2zk\cdot p\big) - xm^2 - ym^2 + yq^2 + zp^2 + i\epsilon \end{aligned} \tag{6.4.6}$$

und Einführung von $l = k + yq - zp$ wegen $p^2 = m^2$

$$\begin{aligned} &= \big(l^2 - y^2q^2 - z^2p^2 + 2yzq\cdot p\big) - xm^2 - ym^2 + yq^2 + zp^2 + i\epsilon \\ &= l^2 - y^2q^2 - z^2m^2 + 2yzq\cdot p + yq^2 - (x+y+z)m^2 + 2zm^2 + i\epsilon \\ &= l^2 - y^2q^2 + 2yzq\cdot p + yq^2 - (1-z)^2m^2 + i\epsilon \quad . \end{aligned} \tag{6.4.7}$$

Nun gilt der Zusammenhang

$$q^2 = (p'-p)^2 = 2m^2 - 2p\cdot p' = 2p\cdot(p-p') = -2p\cdot q \quad , \tag{6.4.8}$$

woraus

$$-y^2q^2 + 2yzq\cdot p + yq^2 = -y^2q^2 - y(1-x-y)q^2 + yq^2 = xyq^2 \qquad (6.4.9)$$

folgt. Damit ergibt sich die endgültige Form des Terms im Nenner zu

$$D = l^2 + xyq^2 - (1-z)^2m^2 + i\epsilon \qquad , \qquad (6.4.10)$$

in welchem die neue Variable nur in der einfachen Form l^2 auftritt. Den Zähler kann man entsprechend

$$\begin{aligned} Z^\mu &= -\gamma_\rho\,(k'_\sigma\gamma^\sigma + m)\,\gamma^\mu\,(k_\kappa\gamma^\kappa + m)\,\gamma^\rho \\ &= -k'_\sigma k_\kappa\,\gamma_\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\kappa\gamma^\rho - mk'_\sigma\,\gamma_\rho\gamma^\sigma\,\gamma^\mu\gamma^\rho - mk_\kappa\,\gamma_\rho\gamma^\mu\gamma^\kappa\gamma^\rho - m^2\,\gamma_\rho\gamma^\mu\gamma^\rho \\ &= 2k'_\sigma k_\kappa\,\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma^\sigma - 4mk'_\sigma\,g^{\sigma\mu} - 4mk_\kappa\,g^{\mu\kappa} + 2m^2\,\gamma^\mu \\ &= 2k'_\sigma k_\kappa\,\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma^\sigma - 4m\big(k'^\mu + k^\mu\big) + 2m^2\,\gamma^\mu \end{aligned} \qquad (6.4.11)$$

umformen, wobei die Beziehungen

$$\gamma_\rho\gamma^\mu\gamma^\rho = -2\gamma^\mu \qquad (6.4.12)$$

$$\gamma_\rho\gamma^\mu\gamma^\kappa\gamma^\rho = +4g^{\mu\kappa} \qquad (6.4.13)$$

$$\gamma_\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\kappa\gamma^\rho = -2\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma^\sigma \qquad (6.4.14)$$

ausgenutzt wurden. Für den ersten Term im Zähler ergibt die Substitution:

$$\begin{aligned} k_\kappa\,\gamma^\kappa\gamma^\mu k'_\sigma\gamma^\sigma &= \big(l_\kappa - yq_\kappa + zp_\kappa\big)\,\gamma^\kappa\gamma^\mu\big(l_\sigma + (1-y)q_\sigma + zp_\sigma\big)\gamma^\sigma \\ &= \big(l_\kappa - yp'_\kappa + (y+z)p_\kappa\big)\,\gamma^\kappa\gamma^\mu\big(l_\sigma + (1-y)p'_\sigma - (1-y-z)p_\sigma\big)\gamma^\sigma \\ &= \big(l_\kappa - yp'_\kappa + (1-x)p_\kappa\big)\,\gamma^\kappa\gamma^\mu\big(l_\sigma + (1-y)p'_\sigma - xp_\sigma\big)\gamma^\sigma \\ &= l_\kappa l_\sigma\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma^\sigma + l_\rho A^{\rho\mu}(y,z,q,p) \\ &\qquad - y(1-y)\,p'_\kappa\gamma^\kappa\,\gamma^\mu\,p'_\sigma\gamma^\sigma - x(1-x)\,p_\kappa\gamma^\kappa\,\gamma^\mu\,p_\sigma\gamma^\sigma \\ &\qquad\qquad + xy\,p'_\kappa\gamma^\kappa\,\gamma^\mu\,p_\sigma\gamma^\sigma + (1-x)(1-y)\,p_\kappa\gamma^\kappa\,\gamma^\mu\,p'_\sigma\gamma^\sigma \end{aligned}$$

Der erste Summand lässt sich entsprechend

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\,\frac{l_\kappa l_\sigma \gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma^\sigma}{D^3} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\,\frac{\frac{l^2}{4}\,g_{\kappa\sigma}\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma^\sigma}{D^3} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\,\frac{-\frac{l^2}{2}\,\gamma^\mu}{D^3}$$

vereinfachen. Die Auflösung der weiteren Summanden gelingt unter Verwendung der Vertauschungsrelation

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu \tag{6.4.15}$$

sowie den Dirac-Gleichungen

$$p_\mu\gamma^\mu u(\vec{p}) = m\,u(\vec{p}) \tag{6.4.16}$$

$$\bar{u}(\vec{p}\,')\gamma^\mu p'_\mu = m\,\bar{u}(\vec{p}\,') \qquad , \tag{6.4.17}$$

da in dem hier betrachtetem Fall die zugehörigen Elektronenlinien auf der Massenschale liegen sollen; die Matrixelemente also zwischen freien Spinoren zu bilden sind. Damit rechnet man:

$$\begin{aligned}
\bar{u}'p'_\kappa\gamma^\kappa\,\gamma^\mu\,p'_\sigma\gamma^\sigma u &= \bar{u}'mp'_\sigma\gamma^\mu\gamma^\sigma u \\
&= \bar{u}'mp'_\sigma\big(2g^{\mu\sigma} - \gamma^\sigma\gamma^\mu\big)u = \bar{u}'m\big(2p'^\mu - m\gamma^\mu\big)u \\
\bar{u}'p_\kappa\gamma^\kappa\,\gamma^\mu\,p_\sigma\gamma^\sigma u &= \bar{u}'p_\kappa\gamma^\kappa\gamma^\mu mu \\
&= \bar{u}'\big(2g^{\mu\kappa} - \gamma^\mu\gamma^\kappa\big)p_\kappa m\,u = \bar{u}'\big(2p^\mu - m\gamma^\mu\big)m\,u \\
\bar{u}'p'_\kappa\gamma^\kappa\,\gamma^\mu\,p_\sigma\gamma^\sigma u &= \bar{u}'m\gamma^\mu m\,u \\
\bar{u}'p_\kappa\gamma^\kappa\,\gamma^\mu\,p'_\sigma\gamma^\sigma u &= \bar{u}'\big(p'_\sigma 2\gamma^\sigma p^\mu - p'_\sigma\gamma^\mu\gamma^\kappa\gamma^\sigma p_\kappa\big)u \\
&= \bar{u}'\big(p'_\sigma 2\gamma^\sigma p^\mu - p'_\sigma\gamma^\mu 2p^\sigma + p'_\sigma\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\kappa p_\kappa\big)u \\
&= \bar{u}'\big(p'_\sigma 2\gamma^\sigma p^\mu - p'_\sigma\gamma^\mu 2p^\sigma + p'^\mu 2\gamma^\kappa p_\kappa - p'_\sigma\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\kappa p_\kappa\big)u \\
&= \bar{u}'\big(2mp^\mu - 2p'\cdot p\gamma^\mu + 2mp'^\mu - m^2\gamma^\mu\big)u \\
&= \bar{u}'\big(2mp^\mu - (2m^2 - q^2)\gamma^\mu + 2mp'^\mu - m^2\gamma^\mu\big)u
\end{aligned}$$

Für den zweiten Term im Zähler ergibt die Substitution:

$$\begin{aligned}
2k'^\mu + 2k^\mu &= 4k^\mu + 2q^\mu = 4\big(l^\mu - yq^\mu + zp^\mu\big) + 2q^\mu \\
&= 4l^\mu + 4zp^\mu + 2(1-2y)q^\mu
\end{aligned}$$

Es ist nun zweckmäßig p'^μ und p^μ zu symmetrisieren:

$$\begin{aligned}
&-2y(1-y)p'^\mu - 2x(1-x)p^\mu - 4zp^\mu \\
&\quad = -2y(1-y)p'^\mu - 2x(1-x)p^\mu - 4(1-x-y)p^\mu \\
&\qquad + \Big(y(1-y) - x(1-x) - 2(1-x-y)\Big)(p'^\mu - p^\mu) \\
&\qquad - \Big(y(1-y) - x(1-x) - 2(1-x-y)\Big)\, q^\mu \\
&\quad = \Big(-y(1-y) - x(1-x) - 2(1-x-y)\Big)(p'^\mu + p^\mu) \\
&\qquad\qquad - \Big(y(1-y) - x(1-x) - 2(1-x-y)\Big)\, q^\mu
\end{aligned}$$

Sammelt man die gleichartigen Terme zusammen, so erhält man:

$$q^2\gamma^\mu\text{-Koeff.} = (1-x)(1-y)q^2 \tag{6.4.18}$$

$$\begin{aligned}
m^2\gamma^\mu\text{-Koeff.} &= -y(1-y)(-1) - x(1-x)(-1) + xy + (1-x)(1-y)(-3) + 1 \\
&= y - y^2 + x - x^2 + xy - 3 + 3x + 3y - 3xy + 1 \\
&= -2 - x^2 - y^2 + 4x + 4y - 2xy \\
&= 1 - 2(1-x-y) - (1-x-y)^2 \\
&= 1 - 2z - z^2
\end{aligned} \tag{6.4.19}$$

$$\begin{aligned}
(p'^\mu + p^\mu)m\text{-Koeff.} &= -y(1-y) - x(1-x) - 2(1-x-y) + 2(1-x)(1-y) \\
&= -y + y^2 - x + x^2 - 2 + 2x + 2y + 2 - 2x - 2y + 2xy \\
&= -(1-x-y)(x+y) \\
&= z(z-1)
\end{aligned} \tag{6.4.20}$$

$$\begin{aligned}
q^\mu m\text{-Koeff.} &= -2(1-2y) - \Big(y(1-y) - x(1-x) - 2(1-x-y)\Big) \\
&= -2 + 4y - y + y^2 + x - x^2 + 2 - 2x - 2y \\
&= -(x+y+1)(x-y) \\
&= (z-2)(x-y)
\end{aligned} \tag{6.4.21}$$

Für den Zähler ergibt sich damit insgesamt

$$\begin{aligned}
\frac{Z^\mu}{2} = &\left(-\frac{l^2}{2} + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2\right)\gamma^\mu + z(z-1)(p'^\mu + p^\mu)m \\
&+ (z-2)(x-y)q^\mu m + l_\rho A^{\rho\mu}(y,z,q,p) + 4l^\mu \qquad .
\end{aligned} \tag{6.4.22}$$

Die Terme linear in l verschwinden bei der Integration über d^4l, da der Nenner nur von l^2 abhängt und der Term mit q^μ verschwindet wegen $\bar{u}'(p)q^\mu u(p) = 0$ ebenfalls. Nach Verwendung der Gordon-Identität verbleibt der relevante Teil

$$\bar{u}'\,\delta\Gamma^\mu\,u = ie^2\int\frac{d^4i}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{2}{D^3}$$
$$\cdot\,\bar{u}(\vec{p}\,')\,2\left(\left(-\frac{l^2}{2}+(1-x)(1-y)q^2+(1-4z+z^2)m^2\right)\gamma^\mu\right.$$
$$\left.-\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\cdot 2m^2z(z-1)\right)u(\vec{p}) \qquad . \quad (6.4.23)$$

Hieraus kann man durch Vergleich mit (6.4.3)

$$F_2(0) = ie^2\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\left.\frac{-8m^2z(z-1)}{D^3}\right|_{q=0}$$
$$= -\frac{8m^2ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)z(z-1)\int\left.\frac{d^4l}{D^3}\right|_{q=0} \quad (6.4.24)$$

ablesen. Das letzte Integral über das Volumen des Minkowski-Raumes ist leicht auszuwerten. Die Substitution $l^0 = il_E^0$ und $l^i = l_E^i$ überführt es in ein Integral über eine gewöhnliche 4-dimensionale Kugel. Eine 4-dimensionale Kugelschale hat das Volumen $dV = 2\pi^2 l_E^3\,dl_E$, so dass sich für das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^4l}{\left(l^2-(1-z)^2m^2\right)^3} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{id^4l_E}{\left(-l_E^2-(1-z)^2m^2\right)^3}$$
$$= -2\pi^2 i\int_0^{+\infty}\frac{l_E^3 dl_E}{\left(l_E^2+(1-z)^2m^2\right)^3}$$
$$= -2\pi^2 i\left(-\frac{1}{2\left(l_E^2+(1-z)^2m^2\right)}+\frac{\left((1-z)^2m^2\right)^2}{4\left(l_E^2+(1-z)^2m^2\right)^2}\right)_{l_E=0}^{l_E=\infty}$$
$$= -\frac{\pi^2 i}{2(1-z)^2m^2} \quad (6.4.25)$$

ergibt. Die weitere Rechnung ist dann ohne Probleme ausführbar.

Mit explizit ausgeschriebenem 3-fach Integral rechnet man

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \frac{8m^2ie^2}{(2\pi)^4} \cdot \frac{\pi^2 i}{2m^2} \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx\, \delta(x+y+z-1\,) \frac{z(z-1)}{(1-z)^2} \\ &= -\frac{e^2}{(2\pi)^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy\, \frac{-z}{1-z} \quad = \quad \frac{e^2}{(2\pi)^2} \int_0^1 dz\, z \\ &= \quad \frac{e^2/4\pi}{2\pi} \quad = \quad \frac{\alpha}{2\pi} \quad \approx \quad 1 + 0.001\,162 \end{aligned} \tag{6.4.26}$$

und erhält das bereits in (6.2.16) angegebene Ergebnis.

6.5 Messung des magnetischen Moments

In diesem Abschnitt soll die messtechnische Bestimmung des gyromagnetischen Faktors kurz skizziert werden. Der aktuell beste Wert ist [Han10]

$$\left.\frac{g_e}{2}\right|_{\mathrm{exp}} = 1 + 0.001\,159\,652\,180\,73(28) \quad . \tag{6.5.1}$$

Die eingeklammerten Ziffern bezeichnen dabei die Unsicherheit in den letzten Stellen des angegebenen Wertes; d.h. die geschätzte Standardabweichung vom tatsächlichen Wert. Dies entspricht einer relativen Unsicherheit von $0.28{\cdot}10^{-12}$. Ein solch extrem präzises Ergebnis ist möglich, indem man ein einzelnes Elektron in einer sogenannten Penning-Falle einfängt und speichert. Die Speicherung erlaubt es, die Bestimmung des gyromagnetischen Faktors auf die Messung von Frequenzen, die hochgenau bestimmt werden können, zurückzuführen.

In einer idealen Penning-Falle herrscht ein konstantes Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ und ein elektrisches Potential

$$\Phi = -\frac{U_0}{2d^2}\left(z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right) \quad , \tag{6.5.2}$$

das durch geeignet geformte Elektroden erzeugt wird. Die Konstante d ist dabei eine charakteristische Größe der Penning-Falle. Aus dem Potential ergibt sich das elektrische Quadrupolfeld

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{U_0}{2d^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} \quad . \tag{6.5.3}$$

Über die Lorentz-Kraft $\vec{F} = q_e e\big(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\big)$ folgt für ein Elektron in der Penning-Falle die Bewegungsgleichung:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{eU_0}{2d^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} - e \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \tag{6.5.4}$$

Aus dieser kann man ablesen, dass die z-Komponente für $U_0 > 0$ einen harmonischen Oszillator mit der Frequenz

$$\omega_z = \left(\frac{eU_0}{md^2} \right)^{1/2} \tag{6.5.5}$$

darstellt. Man spricht von einer axialen Bewegung. Für die beiden anderen Komponenten folgt

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \frac{eU_0}{2d^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - eB \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} \qquad . \tag{6.5.6}$$

Der Lösungsansatz

$$x = r_+ \cos(\omega_+ t) + r_- \cos(\omega_- t + \phi) \tag{6.5.7}$$

$$y = r_+ \sin(\omega_+ t) + r_- \sin(\omega_- t + \phi) \tag{6.5.8}$$

führt zu den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} &- m r_+ \omega_+^2 \cos(\omega_+ t) - m r_- \omega_-^2 \cos(\omega_- t + \phi) \\ &\quad = \frac{eU_0}{2d^2} \Big(r_+ \cos(\omega_+ t) + r_- \cos(\omega_- t + \phi) \Big) \\ &\qquad - eB \Big(r_+ \omega_+ \cos(\omega_+ t) + r_- \omega_- \cos(\omega_- t + \phi) \Big) \end{aligned} \tag{6.5.9}$$

$$\begin{aligned} &- m r_+ \omega_+^2 \sin(\omega_+ t) - m r_- \omega_-^2 \sin(\omega_- t + \phi) \\ &\quad = \frac{eU_0}{2d^2} \Big(r_+ \sin(\omega_+ t) + r_- \sin(\omega_- t + \phi) \Big) \\ &\qquad - eB \Big(r_+ \omega_+ \sin(\omega_+ t) + r_- \omega_- \sin(\omega_- t + \phi) \Big) \end{aligned} \tag{6.5.10}$$

aus denen man durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} &\omega_\pm^2 - \frac{eB}{m} \omega_\pm + \frac{eU_0}{2md^2} = 0 \\ &\qquad \Longrightarrow \quad \omega_\pm = \frac{eB}{2m} \pm \left(\left(\frac{eB}{2m} \right)^2 - \frac{eU_0}{2md^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{6.5.11}$$

erhält. ω_+ wird als modifizierte Zyklotronfrequenz und ω_- als Magnetronfrequenz bezeichnet. Dabei gelten für eine typische Penning-Falle die ungefähren Verhältnisse

$$\omega_+ : \omega_z : \omega_- \approx 10^6 : 10^3 : 1 \tag{6.5.12}$$

der bisher eingeführten drei Frequenzen. Die nachstehende Abbildung zeigt die Bahnbewegung des Elektrons in der Penning-Falle.

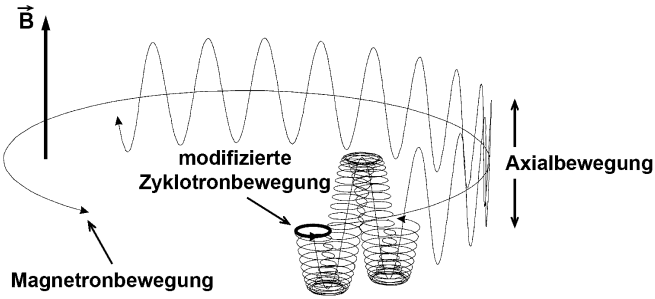


Abbildung 6.3: Bahnbewegung eines Elektrons in einer Penning-Falle

Aus den drei Eigenfrequenzen kann man die nicht messbare freie Zyklotronfrequenz (sie ist keine Eigenfrequenz)

$$\omega_c^2 = \omega_z^2 + \omega_+^2 + \omega_-^2 = \left(\frac{eB}{m}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \omega_c = \frac{eB}{m} \tag{6.5.13}$$

gewinnen, die der Umlauffrequenz des Elektrons im konstanten Magnetfeld entspricht. In [Gab86] wird gezeigt, dass die so ermittelte freie Zyklotronfrequenz unabhängig von kleinen Abweichungen der Form der Elektroden und deren Positionierung ist.

Nun ist die Energiedifferenz zwischen den beiden Spin-Zuständen des Elektrons im Magnetfeld (siehe (6.2.3))

$$\Delta W = V_{\text{mag}}^{\sigma=1/2} - V_{\text{mag}}^{\sigma=-1/2} = g_e \, \frac{e}{2m} \, B \qquad . \tag{6.5.14}$$

Die zugeordnete Frequenz $\omega_L = \Delta W$ wird als Larmor-Frequenz bezeichnet. Es folgt

$$\frac{g_e}{2} = \frac{\omega_L}{\omega_c} = 1 + \frac{\omega_L - \omega_c}{\omega_c} \qquad . \tag{6.5.15}$$

Durch die Bildung des Verhältnis zweier Frequenzen ist es nicht notwendig, die Größen e, U_0, B genau zu kennen! Der Nachteil des obigen Verhältnisses ist allerdings, dass ω_L und ω_c nur wenig voneinander abweichen und deshalb beide sehr genau bestimmt werden müssten. Man nimmt deshalb unter Ausnutzung der Beziehungen

$$\omega_c = \omega_+ + \omega_- \qquad \text{sowie} \qquad \omega_+\omega_- = \frac{\omega_z^2}{2} \tag{6.5.16}$$

und Einführung von $\omega_a = \omega_L - \omega_+$ die Umformung

$$a_e = \frac{g_e}{2} - 1 = \frac{\omega_L - \omega_+ - \omega_-}{\omega_+ + \omega_-} = \frac{\omega_a - \omega_z^2/2\omega_+}{\omega_+ + \omega_z^2/2\omega_+} \tag{6.5.17}$$

vor, um auf diese Weise die Anomalie direkt zu bestimmen. Die axiale Frequenz ω_z kann man über die in die Elektroden induzierten Spiegelströme relativ einfach messen. Bei den Frequenzen ω_a und ω_+ ist es sinnvoll die Energieniveaus des Elektrons in der Penning-Falle zu betrachten. Berücksichtigt man nur die zu diesen beiden Frequenzen gehörenden Terme, so ergibt sich

$$E(n, \sigma) = \omega_L \sigma + \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_+ \tag{6.5.18}$$

mit der Spin-Quantenzahl $\sigma_\pm = \pm 1/2$ und der ω_+-Quantenzahl $n = 0, 1, 2, \cdots$. Dies bedeutet, dass die beiden Frequenzen als Übergangsenergien

$$\begin{aligned} E(0, \sigma_+) - E(1, \sigma_-) &= \omega_L - \omega_+ \;=\; \omega_a \\ E(1, \sigma_+) - E(0, \sigma_+) &= \omega_+ \end{aligned} \tag{6.5.19}$$

auftreten und sich mit Hilfe von resonanten Anregungen mittels Einstrahlung von Photonen bestimmen lassen. Um die in (6.5.1) angegebene Genauigkeit zu erreichen, sind natürlich die Unterschiede zu einer realen Penning-Falle und relativistische sowie gravitative Korrekturen zur Elektronenbewegung zu berücksichtigen. Zwei sich ergänzende, sehr detaillierte Gesamtdarstellungen finden sich in [Gab86, Sch11].

6.6 Die Feinstrukturkonstante

Will man den gyromagnetischen Faktor in einer äquivalenten Genauigkeit wie das experimentelle Ergebnis (6.5.1) theoretisch berechnen, müssen die in die Berechnung einfließenden Eingangsparameter mit einer entsprechenden Genauigkeit vorliegen. Dies gilt insbesondere für die Feinstrukturkonstante α,

nach deren Ordnung ja die Feynman-Diagramme entwickelt werden. Die derzeit genaueste Bestimmung der Feinstrukturkonstanten erfolgt ausgehend von der Definition der Rydberg-Konstanten über die Beziehung

$$\alpha = \left(2\,\frac{R_\infty}{c}\,\frac{m_u}{m_e}\,\frac{M}{m_u}\,\frac{h}{M}\right)^{1/2} \quad . \tag{6.6.1}$$

Dabei bezeichnet R_∞ die Rydberg-Konstante, m_u die atomare Masseneinheit und M steht für die Masse eines geeigneten Referenzatoms. Die Rydberg-Konstante selbst ist als Proportionalitätsfaktor

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0 h^3 c} = \frac{c m_e \alpha^2}{2h} \tag{6.6.2}$$

für die Wellenzahl eines Photons bei dem Übergang zwischen den Energieniveaus im Wasserstoffatom mit den Hauptquantenzahlen n_1 und n_2 definiert. Die Bestimmung der Rydberg-Konstanten erfolgt durch spektroskopische Messungen am Wasserstoffatom. Das relative Atomgewicht M/m_u des Referenzatoms ergibt sich durch Massenspektroskopie aus dem Vergleich der Zyklotronfrequenzen eines Ions des Referenzatoms mit der eines $^{12}C^{6+}$-Ions, während das relative Atomgewicht m_e/m_u aus dem Verhältnis der Larmor-Frequenz und der Zyklotronfrequenz von $^{28}Si^{13+}$ berechnet wird. In diese Rechnung geht der g-Faktor des gebundenen Elektrons ein, der störungstheoretisch berechnet wird. Als Referenzatom wird als Beispiel ^{113}Cs verwendet und dessen Masse über den Rückstoß, den es bei der Absorption eines Photons erfährt, ermittelt. Die Tabelle 6.1 zeigt die so bestimmten Werte und die daraus ermittelte Feinstrukturkonstante.

Term	Wert	Unsicherheit	Referenz
R_∞ [m^{-1}]	10 973 731.568 160	$1.9 \cdot 10^{-12}$	[Cod18]
m_e/m_u	$0.548\,579\,909\,067 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-11}$	[Stu14]
M/m_u	132.905 451 9610	$6.5 \cdot 10^{-11}$	[Cod18]
h/M [m^2/s]	$3.002\,369\,4721 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{-10}$	[Par18]
α	$7.297\,352\,5693 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-10}$	[Par18]
α^{-1}	137.065 999 084	$2 \cdot 10^{-10}$	[Par18]

Tabelle 6.1: Zusammenstellung der relevanten Größen.

Die Genauigkeit der Feinstrukturkonstanten reicht aus, um den g-Faktor mit einer theoretischen Genauigkeit zu berechnen, die der Genauigkeit des experimentellen Wertes entspricht. Ein interessanter Aspekt der Gleichung (6.6.1) ist, dass in die Größen zur Ermittelung der Feinstrukturkonstanten die Feinstrukturkonstante über die notwendigen QED Rechnungen selbst eingeht; d.h. man hat eigentlich eine Gleichung der Form

$$\alpha_n = f(\alpha_{n-1}) \tag{6.6.3}$$

mit einem sehr komplizierten funktionalen Zusammenhang vor sich, die es erlaubt, iterativ den Wert von α exakt zu ermitteln, wenn alle sonstigen Eingangsgrößen exakt bekannt wären. Praktisch wird die Genauigkeit natürlich durch die Genauigkeit dieser anderen Eingangsgrößen begrenzt.

6.7 Korrekturen höherer Ordnung

Für die Anomalie hat sich experimentell (siehe (6.5.1)) der Wert

$$a_e|_{\text{exp}} = \left.\frac{g_e}{2}\right|_{\text{exp}} - 1 = 0.001\,159\,652\,180\,73(28) \qquad . \tag{6.7.1}$$

mit einer relativen Unsicherheit von $2.8 \cdot 10^{-10}$ ergeben. Um einen vergleichbaren theoretischen Wert zu erhalten, sind Störungsrechnungen in höheren Ordnungen notwendig. Der theoretisch zu berechnende Wert setzt sich nach dem Standardmodell aus den drei Anteilen

$$a_e|_{\text{theo}} = a_e(\text{QED}) + a_e(\text{weak}) + a_e(\text{hadron}) \tag{6.7.2}$$

zusammen. Der QED-Term lässt sich über die Störungsreihe ($s_x = m_e/m_x$)

$$a_e(\text{QED}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \left(A_1^{(2n)} + A_2^{(2n)}(s_\mu) + A_2^{(2n)}(s_\tau) + A_3^{(2n)}(s_\mu, s_\tau)\right)$$

berechnen, wobei $2n$ für die störungstheoretische Ordnung steht. n bezeichnet also die Anzahl der virtuellen Photonen die einen Term charakterisieren. Der Term A_1, in dem nur Elektronen und Photonen auftreten, ist massenunabhängig ($s_e = 1$). Abbildung 6.4 zeigt die verschiedenen relativen Beiträge aller relevanten Terme zum Anomaliewert a_e.

Die Berechnung der einzelnen Terme wird mit zunehmender Störungsordnung extrem aufwendig. Dies kann sehr gut an dem Term $A_1^{(2n)}$ veranschaulicht werden. Man bezeichnet ein Feynman-Diagramm als 1-Teilchen-irreduzibel, wenn

es nicht durch Zerschneiden einer inneren Linie in zwei unzusammenhängende Teildiagramme zerfällt. Die zugehörigen Integrale können dann nicht in das Produkt einfacherer Integrale vereinfacht werden. Die Tabelle 6.2 zeigt für die verschiedenen Ordnungen die Anzahl der 1PI-Selbstenergie-Diagramme und der 1PI-Vertex-Diagramme, die alleine zu dem Term $A_1^{(2n)}$ gehören.

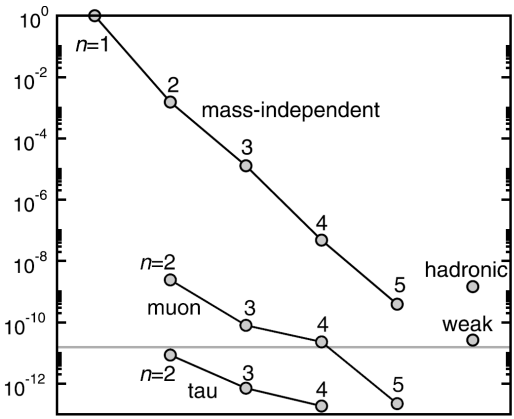


Abbildung 6.4: Vierzehn relative Beiträge zur theoretische Anomalie a_e des Elektrons. Die horizontale Linie zeigt dabei die unabhängig von der Genauigkeit von α erreichte relative *rein theoretische* Genauigkeit von a_e [Cod18].

Ordnung $2n$	Selbstenergien	Vertizes
2	1	1
4	3	7
6	18	72
8	153	891
10	1 638	12 672
12	20 898	202 770
14	307 908	3 602 880
16	5 134 293	70 425 747

Tabelle 6.2: Anzahl der 1PI-Diagramme zu dem Term $A_1^{(2n)}$ [Cvi78].

Die Abbildung 6.5 zeigt einige typische der 12672 1PI-Vertex-Diagramme 10ter Ordnung.

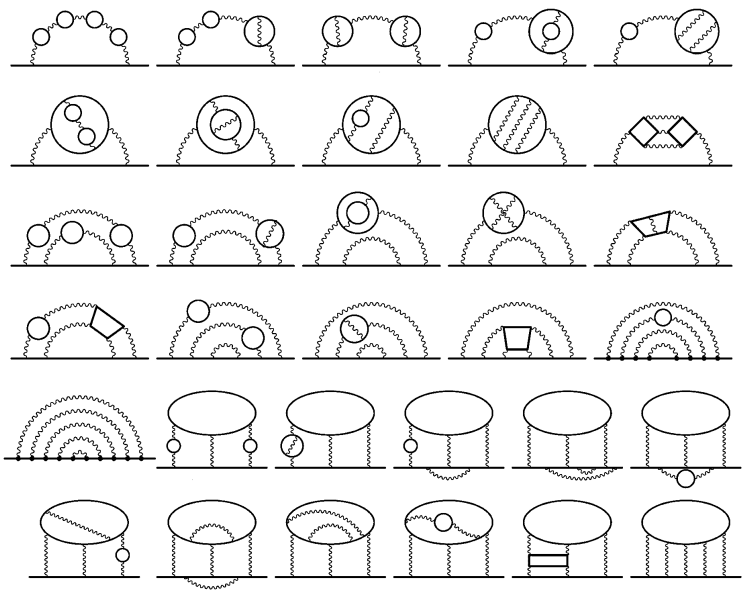


Abbildung 6.5: Typische 1PI-Vertex-Diagramme 10ter Ordnung [Aoy19]

Einen Überblick über die zugehörigen Auswertungen in der 10ten Ordnung erhält man in [Aoy18]. Insgesamt ergibt sich der theoretische Wert [Aoy19]

$$a_e|_{\mathrm{theo}} = 0.001\,159\,652\,181\,606(229) \tag{6.7.3}$$

mit einer relativen Unsicherheit von $2 \cdot 10^{-10}$, die durch die der Feinstrukturkonstanten bestimmt wird. Die Differenz zwischen dem theoretischen und dem experimentellen Wert ist mit

$$\left| a_e|_{\mathrm{theo}} - a_e|_{\mathrm{exp}} \right| = 0.88 \cdot 10^{-12} \tag{6.7.4}$$

extrem gering. Die Bestimmung des gyromagnetischen Faktors liefert eine der genauesten Bestätigungen des Standardmodells des Teilchenphysik.

Teil II

Die Interpretation der Quantentheorie

Kapitel 7

Kanonische Eichtransformationen

Kanonische Eichtransformationen der Form

$$|\eta(t)\rangle^{\text{neu}} = T\ |\eta(t)\rangle^{\text{alt}} \tag{7.0.1}$$

$$O^{\text{neu}} = T\, O^{\text{alt}}\, T^{\dagger} \tag{7.0.2}$$

werden durch unitäre Transformationen $T^{\dagger} = T^{-1}$ erzeugt. Für die Aufteilung des Hamilton-Operators bedeutet dies:

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\eta(t)\rangle = H_{\eta}\,|\eta(t)\rangle \quad \Longrightarrow \quad H_{\eta}^{\text{neu}} = T\,H_{\eta}^{\text{alt}}\,T^{\dagger} + i\,\frac{\partial T}{\partial t}\,T^{\dagger} \tag{7.0.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,O = i\big[\,H_{op}, O\,\big] \quad \Longrightarrow \quad H_{op}^{\text{neu}} = T\,H_{op}^{\text{alt}}\,T^{\dagger} - i\,\frac{\partial T}{\partial t}\,T^{\dagger} \tag{7.0.4}$$

Mit $T\,T^{\dagger} = T^{\dagger}\,T = 1$ verifiziert man

$$\begin{aligned} i\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\eta(t)\rangle^{\text{neu}} &= i\,\frac{\partial T}{\partial t}\,|\eta(t)\rangle^{\text{alt}} + T\,i\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\eta(t)\rangle^{\text{alt}} \\ &= i\,\frac{\partial T}{\partial t}\,T^{\dagger}\,T\,|\eta(t)\rangle^{\text{alt}} + T\,H_{\eta}^{\text{alt}}\,|\eta(t)\rangle^{\text{alt}} \\ &= i\,\frac{\partial T}{\partial t}\,T^{\dagger}\,T\,|\eta(t)\rangle^{\text{alt}} + T\,H_{\eta}^{\text{alt}}\,T^{\dagger}\,T\,|\eta(t)\rangle^{\text{alt}} \\ &= \left(i\,\frac{\partial T}{\partial t}\,T^{\dagger} + T\,H_{\eta}^{\text{alt}}\,T^{\dagger}\right)\,|\eta(t)\rangle^{\text{neu}} \\ &= H_{\eta}^{\text{neu}}\,|\eta(t)\rangle^{\text{neu}} \end{aligned} \tag{7.0.5}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} O^{\text{neu}} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(T\, O^{\text{alt}}\, T^{\dagger} \right) \\
&= \frac{\partial T}{\partial t}\, O^{\text{alt}}\, T^{\dagger} + T \left(\frac{\partial}{\partial t}\, O^{\text{alt}} \right) T^{\dagger} + T\, O^{\text{alt}}\, \frac{\partial T^{\dagger}}{\partial t} \\
&= \frac{\partial T}{\partial t}\, T^{\dagger}\, T\, O^{\text{alt}}\, T^{\dagger} + T\, i \left[H_{op}^{\text{alt}}, O^{\text{alt}} \right] T^{\dagger} - T\, O^{\text{alt}}\, T^{\dagger}\, \frac{\partial T}{\partial t}\, T^{\dagger} \\
&= \frac{\partial T}{\partial t}\, T^{\dagger}\, O^{\text{neu}} + i \left[T\, H_{op}^{\text{alt}}\, T^{\dagger}, O^{\text{neu}} \right] - O^{\text{neu}}\, \frac{\partial T}{\partial t}\, T^{\dagger} \\
&= i \left[T\, H_{op}^{\text{alt}}\, T^{\dagger} - i\, \frac{\partial T}{\partial t}\, T^{\dagger}, O^{\text{neu}} \right] \\
&= i \left[H_{op}^{\text{neu}}, O^{\text{neu}} \right] \qquad . \qquad (7.0.6)
\end{aligned}$$

Als Beispiel sei der Übergang vom Schrödinger-Bild in das Heisenberg-Bild betrachtet. Ausgangspunkt ist das Schrödinger-Bild; d.h. es ist

$$H_{\eta}^{\text{alt}} = \hat{H} \qquad (7.0.7)$$

$$H_{op}^{\text{alt}} = 0 \qquad . \qquad (7.0.8)$$

Der Übergang wird durch die unitäre Transformation

$$T = e^{it\hat{H}} \qquad (7.0.9)$$

vermittelt. Dies bedeutet

$$i\, \frac{\partial T}{\partial t}\, T^{\dagger} = i \cdot i\hat{H} e^{it\hat{H}} e^{-it\hat{H}} = -\hat{H} \qquad . \qquad (7.0.10)$$

Damit ergibt sich für das Heisenberg-Bild

$$\begin{aligned}
H_{\eta}^{\text{neu}} &= T H_{\eta}^{\text{alt}} T^{\dagger} + i\, \frac{\partial T}{\partial t}\, T^{\dagger} \\
&= e^{it\hat{H}}\, \hat{H}\, e^{-it\hat{H}} - \hat{H} = \hat{H} - \hat{H} = 0 \qquad (7.0.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= H_{op}^{\text{neu}} = T H_{op}^{\text{alt}} T^{\dagger} - i\, \frac{\partial T}{\partial t}\, T^{\dagger} \\
&= e^{it\hat{H}} \cdot 0 \cdot e^{-it\hat{H}} + \hat{H} = 0 + \hat{H} = \hat{H} \qquad . \qquad (7.0.12)
\end{aligned}$$

Kapitel 8

Beschreibung in einem Volumen

Die notwendige Änderung der Normierung der Feldoperatoren bei der Beschreibung in einem Volumen V wird im Wechselwirkungsbild gezeigt.

8.1 Normierung der Feldoperatoren

Mit ganzzahligen Werten $\ell = (\ell_x, \ell_y, \ell_z)$ und direktem Übergang zu der Darstellung eines skalaren Feldoperators in einem Volumen V ohne Beachtung einer etwaig notwendigen Änderung der Normierung gilt

$$\check{\Phi}(x) = \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left[e^{-ipx}\check{a}(\vec{p}) + e^{ipx}\check{a}^\dagger(\vec{p})\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \check{\Phi}'(x) = \sum_\ell \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p}_\ell)}} \left[e^{-ip_\ell x}\check{a}(\vec{p}_\ell) + e^{ip_\ell x}\check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\right] \quad . \tag{8.1.1}$$

Unter Beachtung von

$$V = L^3 \quad , \quad p_{a\ell} = \frac{2\pi}{L}\ell_a \quad \text{und} \quad \vec{p}_{(-\ell)} = -\vec{p}_\ell \tag{8.1.2}$$

sowie

$$\int_V e^{-ip_\ell x} d^3x = \begin{cases} V & \text{für} \quad \ell = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{8.1.3}$$

wird im Volumen V für den so umdefinierten Feldoperator

$$\int_V \quad :(\partial^\mu \check{\Phi}'(x))^2: \quad d^3x$$

$$= \int_V \quad : \left[\partial^\mu \sum_\ell \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p}_\ell)}} \left[e^{-ip_\ell x} \check{a}(\vec{p}_\ell) + e^{ip_\ell x} \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell) \right] \right]$$

$$\cdot \left[\partial^\mu \sum_{\ell'} \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p}_{\ell'})}} \left[e^{-ip_{\ell'} x} \check{a}(\vec{p}_{\ell'}) + e^{ip_{\ell'} x} \check{a}^\dagger(\vec{p}_{\ell'}) \right] \right] : \quad d^3x$$

$$= \int_V \quad : \left[\sum_\ell \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p}_\ell)}} \cdot ip_\ell^\mu \cdot \left[-e^{-ip_\ell x} \check{a}(\vec{p}_\ell) + e^{ip_\ell x} \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell) \right] \right]$$

$$\cdot \left[\sum_{\ell'} \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p}_{\ell'})}} \cdot ip_{\ell'}^\mu \cdot \left[-e^{-ip_{\ell'} x} \check{a}(\vec{p}_{\ell'}) + e^{ip_{\ell'} x} \check{a}^\dagger(\vec{p}_{\ell'}) \right] \right] : \quad d^3x$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \sum_{\ell'} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p}_\ell)}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p}_{\ell'})}} \cdot ip_\ell^\mu ip_{\ell'}^\mu \cdot \int_V d^3x$$

$$\cdot \Big[e^{-i(p_\ell + p_{\ell'})x} \check{a}(\vec{p}_\ell) \check{a}(\vec{p}_{\ell'}) - e^{-i(p_\ell - p_{\ell'})x} \check{a}^\dagger(\vec{p}_{\ell'}) \check{a}(\vec{p}_\ell)$$

$$- e^{+i(p_\ell - p_{\ell'})x} \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell) \check{a}(\vec{p}_{\ell'}) + e^{+i(p_\ell + p_{\ell'})x} \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell) \check{a}^\dagger(\vec{p}_{\ell'}) \Big]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \sum_{\ell'} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p}_\ell)}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p}_{\ell'})}} \cdot ip_\ell^\mu ip_{\ell'}^\mu$$

$$\cdot V \Big[\delta_{\ell\ell'} e^{-i(E(\vec{p}_\ell) + E(\vec{p}_{\ell'}))t} \check{a}(\vec{p}_\ell) \check{a}(\vec{p}_{\ell'}) - \delta_{\ell\ell'} e^{-i(E(\vec{p}_\ell) - E(\vec{p}_{\ell'}))t} \check{a}^\dagger(\vec{p}_{\ell'}) \check{a}(\vec{p}_\ell)$$

$$- \delta_{\ell\ell'} e^{+i(E(\vec{p}_\ell) - E(\vec{p}_{\ell'}))t} \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell) \check{a}(\vec{p}_{\ell'}) + \delta_{\ell\ell'} e^{+i(E(\vec{p}_\ell) + E(\vec{p}_{\ell'}))t} \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell) \check{a}^\dagger(\vec{p}_{\ell'}) \Big]$$

und wegen $E(\vec{p}_\ell) = E(-\vec{p}_\ell)$

$$\int \quad :(\partial^0 \check{\Phi}'(x))^2: \quad d^3x$$
$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{1}{2E(\vec{p}_\ell)} \cdot (ip_\ell^0)^2 \cdot \Big[e^{-i2E(\vec{p}_\ell)t} \check{a}(\vec{p}_\ell)\check{a}(-\vec{p}_\ell) - \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell)$$
$$- \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) + e^{+i2E(\vec{p}_\ell)t} \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}^\dagger(-\vec{p}_\ell) \Big]$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{E^2(\vec{p}_\ell)}{E(\vec{p}_\ell)} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) - \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{E^2(\vec{p}_\ell)}{2E(\vec{p}_\ell)}$$
$$\cdot \Big[e^{-i2E(\vec{p}_\ell)t} \cdot \check{a}(\vec{p}_\ell)\check{a}(-\vec{p}_\ell) + e^{+i2E(\vec{p}_\ell)t} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}^\dagger(-\vec{p}_\ell) \Big]$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{E^2(\vec{p}_\ell)}{E(\vec{p}_\ell)} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) \quad - \quad \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{E^2(\vec{p}_\ell)}{2E(\vec{p}_\ell)} \cdot \mathrm{Term}(\vec{p}_\ell)$$

sowie

$$\int \quad :(\partial^i \check{\Phi}'(x))^2: \quad d^3x$$
$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{1}{2E(\vec{p}_\ell)} \cdot (ip_\ell^i)^2 \cdot \Big[-e^{-i2E(\vec{p}_\ell)t} \check{a}(\vec{p}_\ell)\check{a}(-\vec{p}_\ell) - \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell)$$
$$- \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) - e^{+i2E(\vec{p}_\ell)t} \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}^\dagger(-\vec{p}_\ell) \Big]$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{(p_\ell^i)^2}{E(\vec{p}_\ell)} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) + \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{(p_\ell^i)^2}{2E(\vec{p}_\ell)}$$
$$\cdot \Big[e^{-i2E(\vec{p}_\ell)t} \cdot \check{a}(\vec{p}_\ell)\check{a}(-\vec{p}_\ell) + e^{+i2E(\vec{p}_\ell)t} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}^\dagger(-\vec{p}_\ell) \Big]$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{(p_\ell^i)^2}{E(\vec{p}_\ell)} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) \quad + \quad \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{(p_\ell^i)^2}{2E(\vec{p}_\ell)} \cdot \mathrm{Term}(\vec{p}_\ell) \quad .$$

Ganz analog ergibt sich

$$\int m^2 {:}(\check{\Phi}'(x))^2{:} \quad d^3x$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{m^2}{E(\vec{p}_\ell)} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell)$$

$$+ \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{m^2}{2E(\vec{p}_\ell)} \cdot \left[e^{-i2E(\vec{p}_\ell)t} \cdot \check{a}(\vec{p}_\ell)\check{a}(-\vec{p}_\ell) + e^{+i2E(\vec{p}_\ell)t} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}^\dagger(-\vec{p}_\ell)\right]$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{m^2}{E(\vec{p}_\ell)} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) \quad + \quad \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell \frac{m^2}{2E(\vec{p}_\ell)} \cdot \mathrm{Term}(\vec{p}_\ell) \quad .$$

Sammelt man alle Terme zusammen, so erhält man schließlich

$$\frac{1}{2}\int \quad {:}\sum_\mu (\partial^\mu \check{\Phi}'(x))^2 + m^2(\check{\Phi}'(x))^2{:} \quad d^3x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \Bigg[\sum_\ell \frac{E^2(\vec{p}_\ell)}{E(\vec{p}_\ell)} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) \quad - \quad \sum_\ell \frac{E^2(\vec{p}_\ell)}{2E(\vec{p}_\ell)} \cdot \mathrm{Term}(\vec{p}_\ell)$$

$$+ \quad \sum_\ell \frac{\sum (p_\ell^i)^2}{E(\vec{p}_\ell)} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) \quad + \quad \sum_\ell \frac{\sum (p_\ell^i)^2}{2E(\vec{p}_\ell)} \cdot \mathrm{Term}(\vec{p}_\ell)$$

$$+ \quad \sum_\ell \frac{m^2}{E(\vec{p}_\ell)} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) \quad + \quad \sum_\ell \frac{m^2}{2E(\vec{p}_\ell)} \cdot \mathrm{Term}(\vec{p}_\ell) \quad \Bigg]$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{2} \Bigg[\quad \sum_\ell \frac{E^2(\vec{p}_\ell) + \sum (p_\ell^i)^2 + m^2}{E(\vec{p}_\ell)} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell)$$

$$- \quad \sum_\ell \frac{E^2(\vec{p}_\ell) - \sum (p_\ell^i)^2 - m^2}{2E(\vec{p}_\ell)} \cdot \mathrm{Term}(\vec{p}_\ell) \quad \Bigg]$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{2} \Bigg[\quad \sum_\ell \frac{2E^2(\vec{p}_\ell)}{E(\vec{p}_\ell)} \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) \quad \Bigg]$$

$$= \quad \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_\ell E(\vec{p}_\ell) \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) \quad .$$

Dies bedeutet

$$\check{H}'_{\text{Skalar}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \sum_{\ell} E(\vec{p}_\ell) \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) \quad . \tag{8.1.4}$$

Nun soll unverändert

$$\begin{aligned} \check{H}_{\text{Skalar}} &= \frac{1}{2}\int \quad :\sum_{\mu}(\partial^\mu \check{\Phi}_V(x))^2 + m^2(\check{\Phi}_V(x))^2: \quad d^3x \\ &= \sum_{\ell} E(\vec{p}_\ell) \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) \end{aligned} \tag{8.1.5}$$

gelten. Hieraus folgt, da der Feldoperator quadratisch auftritt, die notwendige Umnormierung des Feldoperators

$$\begin{aligned} \check{\Phi}_V(x) &= \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \cdot \check{\Phi}'(x) \\ &= \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \cdot \sum_{\ell} \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p}_\ell)}} \left[e^{-ip_\ell x}\check{a}(\vec{p}_\ell) + e^{ip_\ell x}\check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\right] \\ &= \sum_{\ell} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p}_\ell)V}} \left[e^{-ip_\ell x}\check{a}(\vec{p}_\ell) + e^{ip_\ell x}\check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\right] \quad . \end{aligned} \tag{8.1.6}$$

Entsprechend ist auch die Normierung der anderen Feldoperatoren im Volumen anzupassen.

Der Übergang von kontinuierlichen Impulswerten zu diskreten Impulswerten in einem Volumen erfolgt für die *Feldoperatoren* also durch die Ersetzung

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int d^3p \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot \sum_{\ell} \quad , \tag{8.1.7}$$

die man so in der Literatur für den Übergang formuliert findet. Dabei ist aber zu beachten, dass diese Ersetzung ausschließlich für die Feldoperatoren gilt, während als Beispiel für den freien Hamilton-Operator im Gegensatz hierzu

$$\begin{aligned} \check{H}_{\text{Skalar}} &= \int E(\vec{p}) \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p})\check{a}(\vec{p})\, d^3p \\ &\longrightarrow \qquad \check{H}_{V;\text{Skalar}} = \sum_{\ell} E(\vec{p}_\ell) \cdot \check{a}^\dagger(\vec{p}_\ell)\check{a}(\vec{p}_\ell) \end{aligned} \tag{8.1.8}$$

wird.

8.2 Die skalare Wellenfunktion

In diesem Abschnitt wird die Interpretation der skalaren Wellenfunktion in einem Volumen diskutiert.

Anmerkung: Zur übersichtlicheren Schreibweise werden der Index V und der Index ℓ dabei nicht mehr mitgeschrieben!

Die skalare Wellenfunktion im Volumen ist durch

$$\Phi(x) = \langle 0|\check{\Phi}(x)|\check{\eta}(t)\rangle \tag{8.2.1}$$

definiert, woraus sich für den Impulseigenzustand von freien skalaren Teilchen die Wellenfunktion

$$\Phi_p = \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})V}} \cdot e^{-ipx} \tag{8.2.2}$$

ergibt. Die Wellenfunktion von freien skalaren Teilchen erfüllt wie der Feldoperator die Klein-Gordon-Gleichung

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi = 0 \qquad , \tag{8.2.3}$$

zu der die freie Lagrange-Dichte

$$L = \partial_\mu \Phi^\dagger \, \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi \tag{8.2.4}$$

gehört. Mit Hilfe des Noether-Theorems folgt aus der Translationsinvarianz des Wirkungsintegrals die Energie des Klein-Gordon-Feldes

$$\begin{aligned} E|_{\mathrm{KG}} &= \int \left(\partial^0 \Phi^\dagger \, \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Phi^\dagger)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Phi)} \, \partial^0 \Phi - g^{00} L \right) d^3x \\ &= \int \left(\dot{\Phi}^\dagger \dot{\Phi} + \nabla \Phi^\dagger \cdot \nabla \Phi + m^2 \Phi^\dagger \Phi \right) d^3x \end{aligned} \tag{8.2.5}$$

als Erhaltungsgröße. Dies bedeutet insbesondere für die Wellenfunktion (8.2.2) eines Impulseigenzustands

$$\begin{aligned} E_p|_{\mathrm{KG}} &= \int \left(\frac{E^2(\vec{p}) + |\vec{p}|^2 + m^2}{2E(\vec{p})V} \right) d^3x \\ &= E(\vec{p}) \cdot \frac{1}{V} \int d^3x \quad = \quad E(\vec{p}) \qquad . \end{aligned} \tag{8.2.6}$$

Die Wellenfunktion ist also so normiert, dass die Energie des Klein-Gordon-Feldes im Volumen der Energie eines einzelnen Teilchens entspricht.

Die Lagrange-Dichte ist nun zusätzlich noch invariant bei der kombinierten Phasentransformation

$$\begin{aligned} \Phi &\longrightarrow e^{iq}\,\Phi \\ \Phi^\dagger &\longrightarrow \Phi^\dagger e^{-iq} \qquad . \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

Mit Hilfe des Noether-Theorems ergibt sich daraus die elektrische Ladung

$$\begin{aligned} Q &= \int iq \left(\Phi^\dagger \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Phi^\dagger)} - \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Phi)}\,\Phi \right) d^3x \\ &= \int iq \left(\Phi^\dagger \dot{\Phi} - \dot{\Phi}^\dagger \Phi \right) d^3x \end{aligned} \tag{8.2.8}$$

als Erhaltungsgröße. Dies bedeutet wiederum für die Wellenfunktion (8.2.2) eines Impulseigenzustands

$$\begin{aligned} Q &= \int iq \left(\frac{-iE(\vec{p}) - iE(\vec{p})}{2E(\vec{p})V} \right) d^3x \\ &= q \cdot \frac{1}{V} \int d^3x \quad = \quad q \qquad . \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

Die Ladung im Volumen entspricht der Ladung eines einzelnen Teilchens.

Nun ist auch

$$\Phi_p^c = \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})V}} \cdot e^{ipx} \tag{8.2.10}$$

eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung. Für diese Lösung ergeben sich die Erhaltungsgrößen analog wie oben zu

$$E_p^c\big|_{\mathrm{KG}} = E(\vec{p}) \tag{8.2.11}$$

$$Q^c = -q \qquad . \tag{8.2.12}$$

Hieraus kann man ablesen, dass diese Lösung ein Antiteilchen repräsentiert. Die Interpretation der Klein-Gordon-Gleichung im Rahmen einer Einteilchentheorie ist deshalb nur in Sonderfällen möglich.

Anmerkung: In der Literatur wird oft auch die Normierung

$$\eta(x) = \sqrt{2m} \cdot \Phi(x) \tag{8.2.13}$$

verwendet. Mit dieser Normierung wird die Ladung

$$Q = \int \frac{iq}{2m} \left(\eta^\dagger \dot{\eta} - \dot{\eta}^\dagger \eta\right) d^3x \tag{8.2.14}$$

und die Wellenfunktion für ein nicht-relativistisches Teilchen im Impulseigenzustand

$$\begin{aligned} \eta_p(x) &= \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p})}} \cdot \frac{e^{-ipx}}{V} \\ &\simeq \quad e^{-imt} \cdot \frac{e^{+i\vec{p}\vec{x}}}{V} \qquad \text{für} \qquad |\vec{p}| \ll m \quad . \end{aligned} \tag{8.2.15}$$

Definiert man im allgemeinen Fall für ein einzelnes nicht-relativistisches Teilchen eine modifizierte Wellenfunktion über die Beziehung

$$\eta(x) = e^{-imt} \cdot \eta_{nr}(x) \qquad , \tag{8.2.16}$$

dann ergibt sich für die Ladung

$$\begin{aligned} Q &= \int \frac{iq}{2m} \Big(\eta^*_{nr} \left(-im\, \eta_{nr} + \dot{\eta}_{nr}\right) - \left(im\, \eta^*_{nr} + \dot{\eta}^*_{nr}\right) \eta_{nr} \Big) d^3x \\ &\simeq \quad q \int \eta^*_{nr} \eta_{nr}\, d^3x \qquad , \end{aligned} \tag{8.2.17}$$

da im nicht-relativistischen Fall

$$|\dot{\eta}_{nr}| \ll m\, |\eta_{nr}| \qquad \text{sowie} \qquad |\dot{\eta}^*_{nr}| \ll m\, |\eta^*_{nr}| \tag{8.2.18}$$

ist. Da für ein einzelnes Teilchen die Ladung $Q = q$ sein muss, führt dies zu der üblichen Normierung der nicht-relativistischen Wellenfunktion

$$\int \eta^*_{nr}(x) \eta_{nr}(x)\, d^3x = 1 \qquad , \tag{8.2.19}$$

weshalb oftmals die oben angegebene Normierung verwendet wird. Die Ladung ist eine Erhaltungsgröße und als Folge ist die Normierung (8.2.19) der nicht-relativistischen Wellenfunktion zeitlich unveränderlich; d.h. die nicht negative Größe

$$w(x) = \eta^*_{nr}(x) \eta_{nr}(x) \tag{8.2.20}$$

ist als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretierbar.

8.3 Die Spinor-Wellenfunktion

In diesem Abschnitt wird die Interpretation der Spinor-Wellenfunktion in einem Volumen diskutiert.

Anmerkung: Zur übersichtlicheren Schreibweise werden der Index V und der Index ℓ dabei nicht mehr mitgeschrieben!

Die Spinor-Wellenfunktion im Volumen ist durch

$$\Psi(x) = \langle 0|\check{\Psi}(x)|\check{\eta}(t)\rangle \tag{8.3.1}$$

definiert, woraus sich für den Impulseigenzustand von freien Spinor-Teilchen mit Spin σ die Wellenfunktion

$$\Psi_{p,\sigma} = \frac{u(\vec{p},\sigma)}{\sqrt{2E(\vec{p})V}} \cdot e^{-ipx} \tag{8.3.2}$$

ergibt. Die Wellenfunktion von freien Spinor-Teilchen erfüllt wie der Feldoperator die Dirac-Gleichung

$$i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi - m\Psi = 0 \qquad , \tag{8.3.3}$$

zu der die freie Lagrange-Dichte

$$L = i\overline{\Psi}\gamma_\mu \partial^\mu \Psi - m\overline{\Psi}\Psi \tag{8.3.4}$$

gehört. Mit Hilfe des Noether-Theorems folgt aus der Translationsinvarianz des Wirkungsintegrals die Energie des Spinor-Feldes

$$\begin{aligned} E|_{\mathrm{SP}} &= \int \left(\partial^0 \overline{\Psi} \, \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \overline{\Psi}\,)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Psi)} \, \partial^0 \Psi - g^{00} L \right) d^3x \\ &= \int \Big(i\overline{\Psi}\gamma^0 \partial^0 \Psi - L \Big) d^3x \\ &= \int i\Psi^\dagger \dot{\Psi} \, d^3x \end{aligned} \tag{8.3.5}$$

als Erhaltungsgröße. Dabei wurde im letzten Schritt $(\gamma^0)^2 = 1$ verwendet sowie ausgenutzt, dass die Lagrange-Dichte nach Verwendung der Dirac-Gleichung verschwindet. Unter Ausnutzung von

$$u^\dagger(\vec{p},\sigma) u(\vec{p},\sigma) = 2E(\vec{p}) \tag{8.3.6}$$

ergibt sich insbesondere für die Wellenfunktion (8.3.2) eines Impulseigenzustands

$$\begin{aligned} E_p|_{\mathrm{SP}} &= \int i \left(\frac{u^\dagger(\vec{p},\sigma)\, u(\vec{p},\sigma)\big(-iE(\vec{p})\big)}{2E(\vec{p})V} \right) d^3x \\ &= \frac{u^\dagger(\vec{p},\sigma)u(\vec{p},\sigma)}{2} \cdot \frac{1}{V} \int d^3x \quad = \quad E(\vec{p}) \qquad . \end{aligned} \tag{8.3.7}$$

Die Wellenfunktion ist also so normiert, dass die Energie des Spinor-Feldes im Volumen der Energie eines einzelnen Teilchens entspricht.

Die Lagrange-Dichte ist nun zusätzlich noch invariant bei der kombinierten Phasentransformation

$$\begin{aligned} \Psi &\longrightarrow e^{iq}\, \Psi \\ \Psi^\dagger &\longrightarrow \Psi^\dagger e^{-iq} \qquad . \end{aligned} \tag{8.3.8}$$

Mit Hilfe des Noether-Theorems ergibt sich daraus die elektrische Ladung

$$\begin{aligned} Q &= \int iq \left(\overline{\Psi}\, \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \overline{\Psi})} - \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Psi)}\, \Psi \right) d^3x \\ &= \int iq \left(-i\overline{\Psi}\gamma^0 \Psi\right) d^3x \quad = \quad q \int \Psi^\dagger \Psi \, d^3x \end{aligned} \tag{8.3.9}$$

als Erhaltungsgröße. Für ein einzelnes Teilchen mit der Ladung $Q = q$, führt dies zu der üblichen Normierung

$$\int \Psi^\dagger(x)\Psi(x)\, d^3x = 1 \qquad . \tag{8.3.10}$$

Die Normierung (8.3.10) der Spinor-Wellenfunktion ist zeitlich unveränderlich; d.h. die nicht negative Größe

$$w(x) = \Psi^\dagger(x)\Psi_(x) \tag{8.3.11}$$

ist als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretierbar.

Für die Wellenfunktion (8.3.2) eines Impulseigenzustands ergibt sich

$$\begin{aligned} Q &= q \int \left(\frac{u^\dagger(\vec{p},\sigma)u(\vec{p},\sigma)}{2E(\vec{p})V} \right) d^3x \\ &= q \cdot \frac{u^\dagger(\vec{p},\sigma)u(\vec{p},\sigma)}{2E(\vec{p})} \cdot \frac{1}{V} \int d^3x \quad = \quad q \qquad . \end{aligned} \tag{8.3.12}$$

Wie es sein muss entspricht die Ladung im Volumen der Ladung eines einzelnen Teilchens.

Nun ist auch

$$\Psi^c_{p,\sigma} = \frac{v(\vec{p},\sigma)}{\sqrt{2E(\vec{p})V}} \cdot e^{ipx} \tag{8.3.13}$$

eine Lösung der Dirac-Gleichung. Unter Ausnutzung von

$$v^\dagger(\vec{p},\sigma)v(\vec{p},\sigma) = -2E(\vec{p}) \tag{8.3.14}$$

ergeben sich für diese Lösung die Erhaltungsgrößen der Energie

$$\begin{aligned} E^c_p|_{\mathrm{SP}} &= \int i \left(\frac{v^\dagger(\vec{p},\sigma)\, v(\vec{p},\sigma)\big(+iE(\vec{p})\big)}{2E(\vec{p})V} \right) d^3x \\ &= \frac{-v^\dagger(\vec{p},\sigma)v(\vec{p},\sigma)}{2} \cdot \frac{1}{V} \int d^3x \quad = \quad E(\vec{p}) \end{aligned} \tag{8.3.15}$$

und der Ladung

$$\begin{aligned} Q^c &= q \int \left(\frac{v^\dagger(\vec{p},\sigma)v(\vec{p},\sigma)}{2E(\vec{p})V} \right) d^3x \\ &= q \cdot \frac{v^\dagger(\vec{p},\sigma)v(\vec{p},\sigma)}{2E(\vec{p})} \cdot \frac{1}{V} \int d^3x \quad = \quad -q \qquad . \end{aligned} \tag{8.3.16}$$

Hieraus kann man ablesen, dass diese Lösung ein Antiteilchen repräsentiert.

Anmerkung: Die Wellenfunktion eines Antiteilchens ergibt sich aus

$$\Psi^c(x) = \langle \check{\eta}_c(t)|\check{\Psi}(x)|0\rangle \qquad . \tag{8.3.17}$$

Für ein freies Antiteilchen mit scharfem Impuls folgt (8.3.13). Auch die Wellenfunktion eines Antiteilchens erfüllt die Dirac-Gleichung. Dies macht deutlich, dass auch eine Lösung der Dirac-Gleichung nur in Sonderfällen im Rahmen einer Einteilchentheorie interpretiert werden kann.

8.4 Die Wellenfunktion des Vakuums

Bei Betrachtung von Situationen mit mehreren Teilchen kann es notwendig werden für eine Teilchensorte auch die Wellenfunktionen des Vakuums berücksichtigen zu müssen. Nach den Postulaten der Quantenmechanik trägt der Vakuumzustand keine Energie, besitzt keinen Impuls sowie keinen Drehimpuls, ist ungeladen und invariant bei Lorentz-Transformationen; d.h. für diesen gilt:

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{8.4.1}$$

$$\hat{P}^{\mu}\,|0\rangle = 0 \tag{8.4.2}$$

$$\hat{M}^{\mu\nu}\,|0\rangle = 0 \tag{8.4.3}$$

$$\hat{Q}\,|0\rangle = 0 \tag{8.4.4}$$

Dies bedeutet, dass seine Wellenfunktion eine raumzeitliche Konstante sein muss

$$\eta_{\mathrm{vac}}(x) = C \qquad . \tag{8.4.5}$$

Zusammen mit der Normierungsbedingung (8.4.1)

$$\int |\eta_{\mathrm{vac}}(x)|^2\, d^3x = C^2 \int d^3x = C^2 V \stackrel{!}{=} 1 \tag{8.4.6}$$

folgt $C = 1/\sqrt{V}$, was schließlich zu der Wellenfunktion des Vakuums

$$\eta_{\mathrm{vac}}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \tag{8.4.7}$$

führt. Wie zu erwarten, gilt insbesondere

$$V \longrightarrow \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \eta_{\mathrm{vac}}(x) \longrightarrow 0 \qquad , \tag{8.4.8}$$

was allerdings nichts an der Normierung der Wellenfunktion ändert.

Teil III

Die Allgemeine Relativitätstheorie

Kapitel 9

Das Zwillingsparadoxon

Dieses Kapitel basiert auf den Artikeln [Ior04] und [Gam18]. Ich habe mich um eine etwas leichter zugängliche Darstellung bemüht.

9.1 Vorbemerkungen

Das Zwillingsparadoxon beschreibt einen scheinbaren Widerspruch in der Relativitätstheorie. Die Essenz des Zwillingsparadoxons lässt sich wie folgt formulieren: Verlässt ein Raumschiff die Erde, beschleunigt auf einen wesentlichen Teil der Lichtgeschwindigkeit und kehrt nach einiger Zeit wieder zur Erde zurück, dann ist die auf dem Raumschiff verstrichene Zeit deutlich kürzer als die auf der Erde verstrichene Zeit. Dies bedeutet, dass nicht nur die Uhren im Raumschiff und auf der Erde unterschiedliche Zeiten anzeigen, sondern auch, dass der Raumfahrer verglichen mit jemandem auf der Erde weniger gealtert ist. Dies widerspricht der normalen Intuition über das Wesen der Zeit.

In der Literatur wird das Zwillingsparadoxon bis auf wenige Ausnahmen aus Sicht des Erdsystems diskutiert. Insbesondere wird oftmals angenommen, dass die dabei notwendigen Beschleunigungsphasen infinitesimal kurz sind und sich das Raumschiff erst mit einer konstanten Geschwindigkeit von der Erde entfernt und nach einer instantanen Richtungsumkehr mit gleicher konstanter Geschwindigkeit zurückkehrt. Nimmt man beispielsweise als die konstante Reisegeschwindigkeit $V = 0.6$ an, dann folgt aufgrund der Zeitdilatation als Verhältnis der verstrichenen Eigenzeiten

$$\Delta\tau_r = \sqrt{1 - V^2} \cdot \Delta\tau_e = 0.8\, \Delta\tau_e \qquad . \tag{9.1.1}$$

Sind auf der Erde 40 Jahre vergangen, so sind es auf dem Raumschiff nur 32 Jahre. Abbildung 9.1 zeigt das zugehörige Raumzeit-Diagramm.

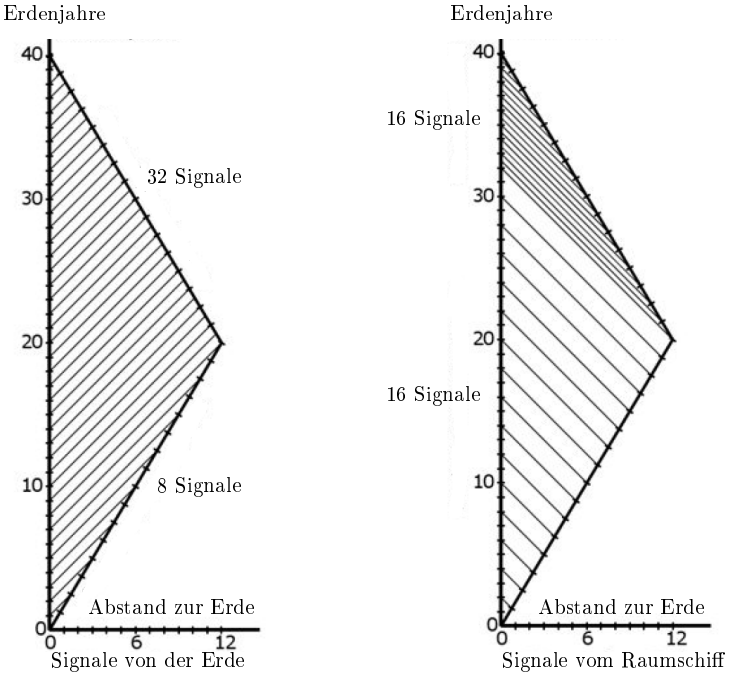


Abbildung 9.1: Raumzeit-Diagramm zum Zwillingsparadoxon.
Das Raumschiff bewegt sich mit 0.6c. Im linken Diagramm wird jedes Erdenjahr ein Signal von der Erde gesendet, im rechten Diagramm in jedem Raumschiffjahr vom Raumschiff. Auf dem Raumschiff werden bis zu seiner Rückkehr 40 Signale von der Erde, während auf der Erde nur 32 Signale vom Raumschiff empfangen werden. Im Raumschiff sind nur 80% der Zeit vergangen wie auf der Erde. Siehe [Lec17].

Die Problematik dieser Betrachtungsweise besteht darin, dass das Raumschiff in den Phasen konstanter Geschwindigkeit ebenfalls ein Inertialsystem darstellt und deshalb aus seiner Sicht die Zeit auf der Erde, die sich ja von ihm aus gesehen auch jeweils mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, langsamer vergehen sollte. Aufgelöst wird diese Situation dadurch, dass das Raumschiff im Gegensatz zur Erde einen Richtungswechsel ausführt. Für die Erde ändert sich durch die Richtungsumkehr des Raumschiffes nichts, während das Raumschiff aber

sein Inertialsystem wechselt. Entscheidend sind also die bisher nicht explizit beachteten Beschleunigungsphasen. Das Raumschiff durchläuft im Gegensatz zur Erde vier Beschleunigungsphasen:

- Start und Beschleunigung auf die Reisegeschwindigkeit V.
- Abbremsung von der Reisegeschwindigkeit bis zum Umkehrpunkt.
- Beschleunigung auf die Rückkehrgeschwindigkeit $-V$ zur Erde hin.
- Abbremsung von der Reisegeschwindigkeit zur Landung auf der Erde.

Diese ursächlichen Beschleunigungsphasen sind nicht in die obige Darstellung eingegangen. Zudem wird nicht klar, ob nach der Landung aus Sicht des Raumschiffes auch auf seiner Uhr weniger Zeit vergangen ist als aus seiner Sicht auf einer Uhr auf der Erde.

9.2 Das Szenario

Um die Beschleunigungsphasen explizit zu berücksichtigen, wird folgendes einfaches Szenario, das aus Sicht der Erde dargestellt ist, analysiert:

- Zeitpunkt T_0: Das Raumschiff beginnt seine Beschleunigung $\tilde{g} = a_0$ von der Erde.
- Zeitpunkt T_1: Direkt nach dem Erreichen seiner Reisegeschwindigkeit V bremst es mit $\tilde{g} = -a_0$ ab.
- Zeitpunkt T_2: Der Umkehrpunkt wird erreicht und die Beschleunigung $\tilde{g} = -a_0$ beibehalten.
- Zeitpunkt T_3: Das Raumschiff erreicht die Rückreisegeschwindigkeit $-V$ und beginnt mit $\tilde{g} = a_0$ zu bremsen.
- Zeitpunkt T_4: Das Raumschiff kommt wieder auf der Erde an.

Hinweise zur Nomenklatur:

- $S(t, x)$: Koordinatensystem, in dessen Ursprung die Erde ruht.
- $\tilde{S}(\tilde{t}, \tilde{x})$: Koordinatensystem, in dessen Ursprung das Raumschiff ruht.
- $x_e(t) = 0$ bzw. $\tilde{x}_e(\tilde{t})$ Koordinaten der Erde im System S bzw. $\tilde{S}$.
- $x_r(t)$ bzw. $\tilde{x}_r(\tilde{t}) = 0$ Koordinaten des Raumschiffs im System S bzw. $\tilde{S}$.

Die Bewegung des Raumschiffes soll ausschließlich auf der x-Achse stattfinden. Es ist deshalb nicht notwendig y, z-Koordinaten mitzuschreiben.

Die Referenzbeschleunigung $a_0 > 0$ soll nicht zeitabhängig sein. Die saubere Definition der konstanten Beschleunigung des Raumschiffes im Sinne der SRT erfolgt für jeden Zeitpunkt t mit Hilfe eines Inertialsystems $\bar{S}_t(\bar{t}, \bar{x})$, in dem zu diesem Zeitpunkt das Raumschiff ruht; d.h. $\bar{v}_r = 0$ gilt. Dann kann man die augenblickliche Beschleunigung im System des Raumschiffes durch

$$\tilde{g} = \frac{d\bar{v}_r}{d\bar{t}} \qquad \text{mit} \qquad \bar{v}_r = \frac{d\bar{x}_r}{d\bar{t}} \qquad \text{im System } \bar{S}_t(\bar{t}, \bar{x}) \tag{9.2.1}$$

definieren. Die Systeme S und $\bar{S}_t$ sind als Inertialsysteme über die Lorentz-Transformation verknüpft. Die Relativgeschwindigkeit sei v. Ausnutzung der relativistischen Addition von Geschwindigkeiten sowie der Lorentz-Transformation liefert für die Beschleunigung aus Sicht des Systems S der Erde:

$$\begin{aligned} g(t) = \frac{dv_r}{dt} &= \frac{dv_r}{d\bar{t}} \Big/ \frac{dt}{d\bar{t}} = \frac{d}{d\bar{t}}\left(\frac{\bar{v}_r + v}{1 + v\bar{v}_r}\right) \Big/ \frac{d}{d\bar{t}}\left(\frac{\bar{t} + v\bar{x}_r}{\sqrt{1-v^2}}\right) \\ &= \left(\frac{\tilde{g}(1 + v\bar{v}_r) - (\bar{v}_r + v)v\tilde{g}}{(1 + v\bar{v}_r)^2}\right) \Big/ \left(\frac{1 + v\bar{v}_r}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \tilde{g}\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{1 + v\bar{v}_r}\right)^3 \end{aligned} \tag{9.2.2}$$

Nach Voraussetzung ist im System S zu jedem Zeitpunkt $v = v_r$ sowie im System $\bar{S}_t$ die Geschwindigkeit des Raumschiffes $\bar{v}_r = 0$. Dies führt zu

$$g(t) = \frac{dv_r}{dt} = \left(1 - v_r^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \tilde{g} \qquad . \tag{9.2.3}$$

9.3 Die Eigenzeiten aus Sicht der Erde

Gleichung (9.2.3) ist eine Differentialgleichung für $v_r(t)$ im System S. Die Separation der Variablen ergibt

$$\tilde{g}\, dt = \frac{dv_r}{\left(1 - v_r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{9.3.1}$$

und, da $\tilde{g}$ konstant sein soll, mit der Lösung

$$\tilde{g}(t_b - t_a) = \tilde{g}\int_{t_a}^{t_b} dt = \int_{v_a}^{v_b} \frac{dv_r}{\left(1 - v_r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{v_r}{\left(1 - v_r^2\right)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_{v_a}^{v_b} \qquad . \tag{9.3.2}$$

Dies auf obiges Szenario angewendet bedeutet für die vier Phasen der Beschleunigung:

$$\boxed{1} \quad a_0(T_1 - T_0) = \frac{V}{\left(1-V^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{wegen} \qquad \tilde{g} = a_0;\ v_a = 0;\ v_b = V$$

$$\boxed{2} \quad -a_0(T_2 - T_1) = \frac{-V}{\left(1-V^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{wegen} \qquad \tilde{g} = -a_0;\ v_a = V;\ v_b = 0$$

$$\boxed{3} \quad -a_0(T_3 - T_2) = \frac{-V}{\left(1-V^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{wegen} \qquad \tilde{g} = -a_0;\ v_a = 0;\ v_b = -V$$

$$\boxed{4} \quad a_0(T_4 - T_3) = \frac{V}{\left(1-V^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{wegen} \qquad \tilde{g} = a_0;\ v_a = -V;\ v_b = 0$$

Hieraus kann man

$$T_4 - T_3 = T_3 - T_2 = T_2 - T_2 = T_1 - T_0 \tag{9.3.3}$$

ablesen. Dies ist plausibel, da die SRT sowohl invariant bei Zeitumkehr als auch Raumspiegelung ist. Bezeichnet $\Delta T = T_{i+1} - T_i$ dieses Zeitintervall, dann hat man

$$a_0\Delta T = \frac{V}{\left(1-V^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \Longleftrightarrow \quad V = \frac{a_0\Delta T}{\sqrt{1+(a_0\Delta T)^2}} \quad . \tag{9.3.4}$$

Die während einer Beschleunigungsphase zurückgelegte Distanz D erhält man aus (9.3.1) nach Multiplikation mit v_r und anschließender Integration

$$\begin{aligned} D = \int_0^{\Delta T} v_r dt &= \frac{1}{a_0}\int_0^V \frac{v_r dv_r}{\left(1-v_r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{\left(1-v_r^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)_0^V = \frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2}} - 1\right) \quad . \end{aligned} \tag{9.3.5}$$

Für die Eigenzeiten eines Objektes im Inertialsystem der Erde gilt

$$d\tau_{\text{obj}} = \sqrt{dt^2 - dx_{\text{obj}}^2} = \sqrt{1 - v_{\text{obj}}^2}\ dt \quad . \tag{9.3.6}$$

Da die Erde in ihrem Koordinatensystem ruht $v_e = 0$, ist ihre Koordinatenzeit mit ihrer Eigenzeit identisch

$$d\tau_e = dt \quad \Longrightarrow \quad \Delta\tau_e(ji) = T_i - T_j \quad . \tag{9.3.7}$$

Dies führt aus Sicht des Erdsystems zu der Reisezeit

$$\Delta\tau_e = 4\Delta T = \frac{4}{a_0}\cdot a_0\Delta T = \frac{4}{a_0}\cdot\frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \quad . \tag{9.3.8}$$

Durch Einsetzen von dt aus (9.3.1) erhält man die dabei verstrichene Eigenzeit des Raumschiffes aus Sicht des Erdsystems zu

$$\begin{aligned}
\Delta\tau_r &= \int_{T_0}^{T_4}\sqrt{1-v_r^2}\ dt \\
&= \int_{T_0}^{T_1}\sqrt{1-v_r^2}\ dt + \int_{T_1}^{T_2}\sqrt{1-v_r^2}\ dt \\
&\qquad + \int_{T_2}^{T_3}\sqrt{1-v_r^2}\ dt + \int_{T_3}^{T_4}\sqrt{1-v_r^2}\ dt \\
&= \frac{1}{a_0}\int_0^V \sqrt{1-v_r^2}\cdot\frac{dv_r}{\left(1-v_r^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a_0}\int_V^0 \sqrt{1-v_r^2}\cdot\frac{dv_r}{\left(1-v_r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&\qquad - \frac{1}{a_0}\int_0^{-V} \sqrt{1-v_r^2}\cdot\frac{dv_r}{\left(1-v_r^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a_0}\int_{-V}^0 \sqrt{1-v_r^2}\cdot\frac{dv_r}{\left(1-v_r^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass

$$\Delta\tau_r(ji) = \frac{1}{a_0}\int_0^V \frac{dv_r}{1-v_r^2} \quad = \quad \frac{1}{a_0}\cdot\operatorname{artanh}(V) \tag{9.3.9}$$

ist. Es folgt

$$\begin{aligned}
\Delta\tau_r &= \Delta\tau_r(01) + \Delta\tau_r(12) + \Delta\tau_r(23) + \Delta\tau_r(34) \\
&= \frac{4}{a_0}\cdot\operatorname{artanh}\left(\frac{a_0\Delta T}{\sqrt{1+(a_0\Delta T)^2}}\right) = \frac{4}{a_0}\cdot\operatorname{arsinh}(a_0\Delta T) \quad .
\end{aligned} \tag{9.3.10}$$

Nun zeigt die Reihenentwicklung

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad > \ z \qquad \text{für} \quad z>0 \quad , \tag{9.3.11}$$

woraus durch Vergleich mit (9.3.8) und (9.3.10) wie zu erwarten

$$\Delta\tau_e = \frac{4}{a_0}\cdot a_0\Delta T = \frac{4}{a_0}\cdot\sinh\left(\frac{a_0}{4}\cdot\Delta\tau_r\right) > \ \Delta\tau_r \tag{9.3.12}$$

folgt. Aus Sicht der Erde vergeht während der Reise in seinem eigenen System mehr Zeit als auf dem Raumschiff.

9.4 Parametrisierung der Zeitkoordinaten

Die Dauer einer Beschleunigungsphase im System S ist $\Delta T = T_i - T_j$ mit $i = j + 1$. Im System des Raumschiffes $\tilde{S}$ definiert man die Parametrisierung der Zeitkoordinate zweckmäßigerweise so, dass

$$\tilde{T}_i - \tilde{T}_j = \Delta\tau_r(ji) = \frac{1}{a_0} \cdot \operatorname{artanh}(V) = \frac{1}{a_0} \cdot \operatorname{arsinh}(a_0 \Delta T) \tag{9.4.1}$$

gilt. Wenn die Uhr auf der Erde $t = T_i$ anzeigt, soll die Uhr im Raumschiff also $\tilde{t} = \tilde{T}_i$ anzeigen; d.h. vom System S aus gesehen sind diese Zeitpunkte gleichzeitig. Dies legt die betreffenden Zeitpunkte im System $\tilde{S}$ für das betrachtete Szenario fest.

9.5 Das beschleunigte Bezugssystems

Ausgangspunkt zur Konstruktion der Koordinatentransformation zwischen dem Inertialsystem S mit Koordinaten (t, x) und einem Beobachter, der in dem konstant beschleunigtem System $\tilde{S}$ mit den Koordinaten $(\tilde{t}, \tilde{x})$ ruht, ist die umgeformte Beziehung (9.3.2) mit den Anfangsbedingungen $t_a = 0,\ v_a = 0$ sowie $t_b = t$

$$v_r = \frac{\tilde{g}t}{\sqrt{1 + (\tilde{g}t)^2}} \quad . \tag{9.5.1}$$

Für die erste Phase der Beschleunigung ergibt sich durch Einsetzten von (9.5.1) die Beziehung zwischen der Eigenzeit des Raumschiffes und der Koordinatenzeit der Erde zu

$$\begin{aligned} \tau_r(t) &= \int_0^t \sqrt{1 - v_r^2}\ dt = \int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{g}t}{\sqrt{1 + (\tilde{g}t)^2}}\right)^2}\ dt \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 + (\tilde{g}t)^2}}\ dt \quad = \quad \frac{1}{\tilde{g}} \cdot \operatorname{arsinh}\big(\tilde{g}t\big) \end{aligned} \tag{9.5.2}$$

bzw. umgeformt

$$t(\tau_r) = \frac{1}{\tilde{g}}\ \sinh\big(\tilde{g}\tau_r\big) \quad . \tag{9.5.3}$$

Dies in (9.5.1) eingesetzt ergibt

$$v_r = \frac{\tilde{g}t}{\sqrt{1 + (\tilde{g}t)^2}} = \frac{\sinh\big(\tilde{g}\tau_r\big)}{\sqrt{1 + \sinh^2\big(\tilde{g}\tau_r\big)}} = \tanh\big(\tilde{g}\tau_r\big) \tag{9.5.4}$$

bzw. nach Integration

$$x_r(\tau_r) = \int_0^t v_r dt = \int_0^{\tau_r} v_r \, \frac{dt}{d\tau_r} \, d\tau_r = \int_0^{\tau_r} \tanh\bigl(\tilde{g}\tau_r\bigr) \, \cosh\bigl(\tilde{g}\tau_r\bigr) \, d\tau_r$$

$$= \int_0^{\tau_r} \sinh\bigl(\tilde{g}\tau_r\bigr) \, d\tau_r \quad = \quad \frac{1}{\tilde{g}}\Bigl(\cosh\bigl(\tilde{g}\tau_r\bigr) - 1\Bigr) \qquad . \tag{9.5.5}$$

Aus den vorstehenden Beziehungen ergibt sich (nun für alle Komponenten angeschrieben) die relativistische Vierer-Geschwindigkeit

$$x_r^\mu = \Bigl(t(\tau_r), x_r(\tau_r), 0, 0\Bigr) \quad \Longrightarrow \quad u^\mu = \frac{dx_r^\mu}{d\tau_r} = \Bigl(\cosh\bigl(\tilde{g}\tau_r\bigr), \sinh\bigl(\tilde{g}\tau_r\bigr), 0, 0\Bigr) \quad .$$

Diese ist tangential zur Weltlinie und zeigt an jedem Punkt der Weltlinie in Richtung der Zeitachse des Raumschiffes. Zur Konstruktion eines mitbewegten Koordinatensystems kann man an jedem Punkt der Weltlinie die vier Einheitsvektoren

$$e_{\tilde{t}}^\mu(\tau_r) = \Bigl(\cosh\bigl(\tilde{g}\tau_r\bigr), \sinh\bigl(\tilde{g}\tau_r\bigr), 0, 0\Bigr) \tag{9.5.6}$$

$$e_{\tilde{x}}^\mu(\tau_r) = \Bigl(\sinh\bigl(\tilde{g}\tau_r\bigr), \cosh\bigl(\tilde{g}\tau_r\bigr), 0, 0\Bigr) \tag{9.5.7}$$

$$e_{\tilde{y}}^\mu(\tau_r) = \Bigl(0, 0, 1, 0\Bigr) \tag{9.5.8}$$

$$e_{\tilde{z}}^\mu(\tau_r) = \Bigl(0, 0, 0, 1\Bigr) \tag{9.5.9}$$

definieren. Jeder Punkt entlang der Weltlinie des Raumschiffes liefert zusammen mit den drei Vektoren $e_1(\tau_r), e_2(\tau_r)$ und $e_3(\tau_r)$ eine Hyperebene, die orthogonal zur Weltlinie ist. Jeder Raumzeitpunkt im Inertialsystem S kann somit entlang der Weltlinie durch die Eigenzeit τ_r und drei Koordinaten $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$ erfasst werden

$$x^\mu = x_r^\mu(\tau_r) + \tilde{x} e_{\tilde{x}}^\mu(\tau_r) + \tilde{y} e_{\tilde{y}}^\mu(\tau_r) + \tilde{z} e_{\tilde{z}}^\mu(\tau_r) \qquad . \tag{9.5.10}$$

Im Ursprung dieser räumlichen Koordinaten ruht das Raumschiff. Man kann deshalb die räumlichen Koordinaten zu einem System $\tilde{S}(\tilde{t}, \tilde{x})$ ergänzen, indem man die Weltlinie des Raumschiffes als Zeitachse dieses Systems interpretiert und so parametrisiert, dass der Wert der Zeitkoordinate in einem Punkt P der Weltlinie der Eigenzeit des Raumschiffes entspricht, wenn das Raumschiff den Punkt P passiert.

Aus (9.5.10) erhält man damit zwischen den Systemen $S(t,x)$ und $\tilde{S}(\tilde{t},\tilde{x})$ mit der Ersetzung τ_r durch $\tilde{t}$ die Koordinatentransformation (die $\tilde{y},\tilde{z}$-Koordinaten ab hier wieder nicht mitgeführt)

$$t = \left(\frac{1}{\tilde{g}} + \tilde{x}\right)\sinh\left(\tilde{g}\tilde{t}\right) \tag{9.5.11}$$

$$x = \left(\frac{1}{\tilde{g}} + \tilde{x}\right)\cosh\left(\tilde{g}\tilde{t}\right) - \frac{1}{\tilde{g}} \quad , \tag{9.5.12}$$

aus der man für festes $\tilde{x}$ im Inertialsystem die Hyperbel

$$\left(\frac{1}{\tilde{g}} + x\right)^2 - t^2 = \left(\frac{1}{\tilde{g}} + \tilde{x}\right)^2 \tag{9.5.13}$$

gewinnt. Wegen $\tilde{x}_r(\tilde{t}) = 0$ bedeutet dies für das Raumschiff

$$\left(\frac{1}{\tilde{g}} + x_r(t)\right)^2 - t^2 = \left(\frac{1}{\tilde{g}}\right)^2 \quad . \tag{9.5.14}$$

Mit dem Verstreichen von $\tilde{t}$ bewegt sich das Raumschiff im Inertialsystem dann entlang dieser Hyperbel. Die Bewegungshyperbel kennzeichnet eine konstant beschleunigte Bewegung. Um die verschiedenen Phasen der Beschleunigung einheitlich beschreiben zu können, ist es zweckmäßig ein zusätzliches Inertialsystem $S'(t',x')$ einzuführen, in dem

- eine Beschleunigungsphase zum Zeitpunkt t'_0 beginnt,
- das Raumschiff zu diesem Zeitpunkt ruht $v'_r(t_0) = 0$
- und sich am Ort $x'_r(t'_0) = d'_0$ befindet.

Die Bahnbewegung des Raumschiffes muss im System S' dann der Hyperbel

$$\left(\frac{1}{\tilde{g}} + \left(x'_r(t') - d'_0\right)\right)^2 - (t' - t'_0)^2 = \left(\frac{1}{\tilde{g}}\right)^2 \tag{9.5.15}$$

folgen. Diese Hyperbel geht aus der Koordinatentransformation

$$t' - t'_0 = \left(\frac{1}{\tilde{g}} + \tilde{x}\right)\sinh\left(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\right) \tag{9.5.16}$$

$$x' - d'_0 = \left(\frac{1}{\tilde{g}} + \tilde{x}\right)\cosh\left(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\right) - \frac{1}{g} \tag{9.5.17}$$

hervor, wenn man gleichzeitig annimmt, dass der Beginn der Beschleunigungsphase im System $\tilde{S}$ bei $\tilde{t} = \tilde{t}_0$ ist.

Die Beziehung (9.3.2) kann man direkt auf das Inertialsystem S' übertragen. Hieraus ergibt sich für die vier Phasen der Beschleunigung:

$$\boxed{1} \quad a_0(T'_1 - T'_0) = \frac{V}{\left(1 - V^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{wegen} \qquad \tilde{g} = a_0;\ v'_a = 0;\ v'_b = V$$

$$\boxed{2} \quad -a_0(T'_2 - T'_1) = \frac{-V}{\left(1 - V^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{wegen} \qquad \tilde{g} = -a_0;\ v'_a = 0;\ v'_b = -V$$

$$\boxed{3} \quad -a_0(T'_3 - T'_2) = \frac{-V}{\left(1 - V^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{wegen} \qquad \tilde{g} = -a_0;\ v'_a = 0;\ v'_b = -V$$

$$\boxed{4} \quad a_0(T'_4 - T'_3) = \frac{V}{\left(1 - V^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{wegen} \qquad \tilde{g} = a_0;\ v'_a = 0;\ v'_b = V$$

Hieraus kann man wiederum

$$T'_4 - T'_3 = T'_3 - T'_2 = T'_2 - T'_2 = T'_1 - T'_0 \tag{9.5.18}$$

ablesen. Da beide Systeme in der ersten Beschleunigungsphase zueinander ruhen, ist zudem

$$T'_1 - T'_0 = T_1 - T_0 = \Delta T \quad . \tag{9.5.19}$$

Die Ergebnisse vom System S können deshalb auf das System S' übertragen werden. Auch dies ist plausibel, da in beiden Systemen die Differenz aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Raumschiffes in jeder Beschleunigungsphase identisch ist.

9.6 Die Eigenzeiten aus Sicht des Raumschiffes

Für das Folgende ist es zweckmäßig die Abkürzung

$$\beta = \tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0) \tag{9.6.1}$$

zu verwenden. Die allgemeine Koordinatentransformation lautet dann

$$t' - t'_0 = \left(\frac{1}{\tilde{g}} + \tilde{x}\right) \sinh \beta \tag{9.6.2}$$

$$x' - d'_0 = \left(\frac{1}{\tilde{g}} + \tilde{x}\right) \cosh \beta - \frac{1}{\tilde{g}} \quad . \tag{9.6.3}$$

Hieraus folgen die Differenziale

$$dt' = d\tilde{x}\sinh\beta + d\tilde{t}\,(1+\tilde{g}\tilde{x})\cosh\beta \tag{9.6.4}$$

$$dx' = d\tilde{x}\cosh\beta + d\tilde{t}\,(1+\tilde{g}\tilde{x})\sinh\beta \quad . \tag{9.6.5}$$

Die Eigenzeit eines Objektes ergibt sich im System $\tilde{S}$ unter Ausnutzung der Lokalitätshypothese aus der Minkowski-Metrik damit zu

$$\begin{aligned}
d\tilde{\tau}_{\mathrm{obj}} &= \sqrt{dt'^2 - dx'^2_{\mathrm{obj}}} \\
&= \Big(\quad \Big(d\tilde{x}_{\mathrm{obj}}\sinh\beta + d\tilde{t}\,(1+\tilde{g}\tilde{x}_{\mathrm{obj}})\cosh\beta\Big)^2 \\
&\qquad - \Big(d\tilde{x}_{\mathrm{obj}}\cosh\beta) + d\tilde{t}\,(1+\tilde{g}\tilde{x}_{\mathrm{obj}})\sinh\beta\Big)^2 \quad \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\quad d\tilde{t}^2\,(1+\tilde{g}\tilde{x}_{\mathrm{obj}})^2\Big(\cosh^2\beta - \sinh^2\beta\Big) \\
&\qquad - d\tilde{x}^2_{\mathrm{obj}}\Big(\cosh^2\beta - \sinh^2\beta\Big) \quad \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{d\tilde{t}^2\,(1+\tilde{g}\tilde{x}_{\mathrm{obj}})^2 - d\tilde{x}^2_{\mathrm{obj}}} \\
&= \sqrt{\big(1+\tilde{g}\tilde{x}_{\mathrm{obj}}\big)^2 - \tilde{v}^2_{\mathrm{obj}}}\; d\tilde{t} \quad .
\end{aligned} \tag{9.6.6}$$

Das Raumschiff ruht im System $\tilde{S}$ im Koordinatenursprung; d.h. es ist $\tilde{v}_r(\tilde{t}) = 0$ sowie $\tilde{x}_r(\tilde{t}) = 0$. Daraus folgt für die Eigenzeit des Raumschiffes im System $\tilde{S}$ natürlich wieder

$$d\tilde{\tau}_r = d\tilde{t} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta\tilde{\tau}_r(ji) = \tilde{T}_i - \tilde{T}_j \quad . \tag{9.6.7}$$

Zur Berechnung der Eigenzeit der Erde aus Sicht des Systems $\tilde{S}$ ist dagegen die Integration von

$$d\tilde{\tau}_e = \sqrt{\big(1+\tilde{g}\tilde{x}_e\big)^2 - \tilde{v}_e^2}\; d\tilde{t} \tag{9.6.8}$$

auszuführen. Die Größen $\tilde{x}_e$ und $\tilde{v}_e$ können über das zusätzlich eingeführte Inertialsystem S' ermittelt werden.

Für die Bewegung der Erde vom Raumschiff aus gesehen folgt

$$t' - t'_0 = \left(\frac{1}{\tilde{g}} + \tilde{x}_e(\tilde{t})\right) \sinh\Big(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\Big) \tag{9.6.9}$$

$$x'_e - d'_0 = \left(\frac{1}{\tilde{g}} + \tilde{x}_e(\tilde{t})\right) \cosh\Big(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\Big) - \frac{1}{\tilde{g}} \quad , \tag{9.6.10}$$

wobei die gestrichenen Größen nun für die Größen im System S' aus Sicht des Systems $\tilde{S}$ des Raumschiffes stehen. Besitzt das Raumschiff zu Beginn seiner Bewegung im System S eine Anfangsgeschwindigkeit v_0, dann besitzt die Erde im System S' die Geschwindigkeit $-v_0$. Dies bedeutet

$$x'_e = -v_0(t' - t'_0) \quad . \tag{9.6.11}$$

Setzt man hier (9.6.9) ein, sowie das Ergebnis in (9.6.10) ein, so folgt

$$-v_0 \left(\frac{1}{\tilde{g}} + \tilde{x}_e(\tilde{t})\right) \sinh\Big(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\Big) = \left(\frac{1}{\tilde{g}} + \tilde{x}_e(\tilde{t})\right) \cosh\Big(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\Big) - \left(\frac{1}{\tilde{g}} - d'_0\right)$$

bzw. durch eine erste Umformung

$$\frac{(1 - \tilde{g}d'_0)}{\tilde{g}} = \left(\frac{1}{\tilde{g}} + \tilde{x}_e(\tilde{t})\right) \left(\cosh\Big(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\Big) + v_0 \sinh\Big(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\Big)\right) \quad ,$$

woraus schließlich die Weltlinie der Erde in der Form

$$\tilde{x}_e(\tilde{t}\,) = \frac{1}{\tilde{g}} \left(\frac{(1 - \tilde{g}d'_0)}{\cosh\Big(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\Big) + v_0 \sinh\Big(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\Big)} - 1\right) \tag{9.6.12}$$

im System des Raumschiffes folgt. Hieraus erhält man durch Ableitung nach $\tilde{t}$ für die Geschwindigkeit der Erde im System $\tilde{S}$ des Raumschiffes:

$$\tilde{v}_e(\tilde{t}) = -(1 - \tilde{g}d'_0) \cdot \frac{\sinh\Big(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\Big) + v_0 \cosh\Big(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\Big)}{\Big(\cosh\Big(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\Big) + v_0 \sinh\Big(\tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0)\Big)\Big)^2} \tag{9.6.13}$$

Für die folgenden Rechnungen ist es wiederum zweckmäßig die Abkürzungen

$$\alpha = 1 - \tilde{g}d'_0 \tag{9.6.14}$$

$$\beta = \tilde{g}(\tilde{t} - \tilde{t}_0) \tag{9.6.15}$$

zu verwenden.

Mit diesen rechnet man für die Eigenzeit der Erde aus Sicht des Raumschiffes

$$\begin{aligned} d\tilde{\tau}_e &= \sqrt{(1+\tilde{g}\tilde{x}_e)^2 - \tilde{v}_e^2(t)}\;\; d\tilde{t} \\ &= \alpha\sqrt{\left(\frac{1}{\cosh\beta + v_0\sinh\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sinh\beta + v_0\cosh\beta}{(\cosh\beta + v_0\sinh\beta)^2}\right)^2}\;\; \frac{d\beta}{\tilde{g}} \\ &= \frac{\alpha}{\tilde{g}}\cdot\frac{\sqrt{(\cosh\beta + v_0\sinh\beta)^2 - (\sinh\beta + v_0\cosh\beta)^2}}{(\cosh\beta + v_0\sinh\beta)^2}\cdot d\beta \\ &= \frac{\alpha}{\tilde{g}}\cdot\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{(\cosh\beta + v_0\sinh\beta)^2}\cdot d\beta \qquad . \end{aligned} \tag{9.6.16}$$

Abschließende Integration liefert

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\tau}_e(ji) &= \frac{\alpha\sqrt{1-v_0^2}}{\tilde{g}}\int_0^{\beta_{ji}}\frac{d\beta}{(\cosh\beta + v_0\sinh\beta)^2} \\ &= \frac{\alpha\sqrt{1-v_0^2}}{\tilde{g}}\cdot\frac{\sinh\beta_{ji}}{\cosh\beta_{ji} + v_0\sinh\beta_{ji}} \\ &= \frac{1}{\tilde{g}}\cdot\frac{(1-\tilde{g}d_0')\sqrt{1-v_0^2}\;\tanh\big(\tilde{g}(\tilde{T}_i - \tilde{T}_j)\big)}{1 + v_0\tanh\big(\tilde{g}(\tilde{T}_i - \tilde{T}_j)\big)} \qquad . \end{aligned} \tag{9.6.17}$$

9.7 Die Eigenzeit im Raumschiff

Das Raumschiff ruht in seinem Koordinatensystem, d.h. es ist $\tilde{x}_r(\tilde{t}) = 0$. Unabhängig vom Vorzeichen von $\tilde{g}$ folgt aus (9.5.16), (9.5.18) sowie (9.5.19) für korrespondierende Zeitabschnitte

$$\Delta T = T_i - T_j = T_i' - T_j' = \frac{1}{a_0}\cdot\sinh\big(a_0(\tilde{T}_i - \tilde{T}_j)\big) \qquad . \tag{9.7.1}$$

Die Eigenzeit im Raumschiff ergibt sich aus (9.6.7) und (9.7.1) einfach zu

$$\Delta\tilde{\tau}_r(ji) = \tilde{T}_i - \tilde{T}_j = \frac{1}{a_0}\cdot\operatorname{arsinh}(a_0\Delta T) \qquad . \tag{9.7.2}$$

Dies stimmt natürlich mit (9.4.1) überein.

9.8 Das Erdsystem aus Sicht des Raumschiffes

Aus (9.6.10) folgt, dass zu Beginn einer Phase der Beschleunigung wegen $t = t_0$

$$-v_0 \cdot 0 - d_0' = \left(\frac{1}{\tilde{g}} + \tilde{x}_e(\tilde{t}_0)\right)\cosh(0) - \frac{1}{\tilde{g}} \quad \Longrightarrow \quad d_0' = -\tilde{x}_e(\tilde{t}_0) \tag{9.8.1}$$

gilt. Dies ist plausibel, da zu Beginn einer Beschleunigungsphase das System S' relativ zum Raumschiff ruht. Natürlich ist beim Start $\tilde{x}_e(\tilde{T}_0) = 0$.

Von $\tilde{T}_0$ zu $\tilde{T}_1$:

$$\tilde{g} = a_0 > 0, \quad a_0 d_0' = -a_0 \tilde{x}_e(\tilde{T}_0) = 0, \quad v_0 = 0 \tag{9.8.2}$$

Dies in (9.6.17) eingesetzt führt unter Ausnutzung von (9.4.1) und (9.3.4) zu

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\tau}_e(01) &= \frac{\tanh\big(a_0(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)\big)}{a_0} \\ &= \frac{\sinh\big(a_0(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)\big)}{a_0\sqrt{1 + \sinh^2\big(a_0(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)\big)}} \\ &= \frac{\Delta T}{\sqrt{1 + (a_0\Delta T)^2}} \quad = \quad \frac{V}{a_0} \quad . \end{aligned} \tag{9.8.3}$$

Für den Anfangsort der Erde im nächsten Abschnitt ergibt sich im System $\tilde{S}$ mit obigen Parametern durch Einsetzen in (9.6.12)

$$\begin{aligned} a_0\tilde{x}_e(\tilde{T}_1) &= \frac{1}{\cosh\Big(a_0(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)\Big)} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (a_0\Delta T)^2}} - 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{V^2}{1 - V^2}}} - 1 \quad = \quad \sqrt{1 - V^2} - 1 \quad . \end{aligned} \tag{9.8.4}$$

Von $\tilde{T}_1$ zu $\tilde{T}_2$:

$$\tilde{g} = -a_0 < 0, \quad a_0 d_{12}' = -a_0\tilde{x}_e(\tilde{T}_1) = 1 - \sqrt{1 - V^2}, \quad v_0 = V \tag{9.8.5}$$

Vergleich mit (9.3.5) zeigt, dass

$$d_{12}' = D\sqrt{1 - V^2} \tag{9.8.6}$$

gilt. Dies ist plausibel. Das Raumschiff befindet sich ja nach dem konstant beschleunigten Abschnitt aus Sicht der Erde in einer (hier infinitesimal kurzen) inertialen Bewegung mit der Geschwindigkeit V. Aus Sicht des Systems S' bewegt sich die Erde mit der Geschwindigkeit $-V$ vom Raumschiff weg. Die Strecke D erscheint deshalb entsprechend der Längenkontraktion verkürzt.

Dies in (9.6.17) eingesetzt führt zu

$$\Delta\tilde{\tau}_e(12) = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{(1+a_0 d'_{12})\sqrt{1-V^2}\ \ \tanh\big(a_0(\tilde{T}_2-\tilde{T}_1)\big)}{1-V\tanh\big(a_0(\tilde{T}_2-\tilde{T}_1)\big)} \quad . \tag{9.8.7}$$

Setzt man hier (siehe (9.4.1))

$$\tanh\big(a_0(\tilde{T}_2-\tilde{T}_1)\big) = V \tag{9.8.8}$$

ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\tau}_e(12) &= \frac{1+a_0 d'_{12}}{a_0} \cdot \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{1+\big(1-\sqrt{1-V^2}\big)}{a_0} \cdot \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \\ &= \quad \frac{2}{a_0} \cdot \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} - \frac{V}{a_0} \quad .\end{aligned} \tag{9.8.9}$$

Für den Anfangsort der Erde im nächsten Abschnitt ergibt sich im System $\tilde{S}$ mit obigen Parametern durch Einsetzen in (9.6.12):

$$\begin{aligned}-a_0\,\tilde{x}_e(\tilde{T}_2\,) &= \frac{1+a_0 d'_{12}}{\cosh\Big(a_0(\tilde{T}_2-\tilde{T}_1)\Big) - V\sinh\Big(a_0(\tilde{T}_2-\tilde{T}_1)\Big)} - 1 \\ &= \frac{1+a_0 d'_{12}}{\sqrt{1+(a_0\Delta T)^2} - V(a_0\Delta T)} - 1 \\ &= \frac{1+(1-\sqrt{1-V^2})}{\sqrt{1+\dfrac{V^2}{1-V^2}} - V\cdot\dfrac{V}{\sqrt{1-V^2}}} - 1 \\ &= \frac{2(1-\sqrt{1-V^2})}{\sqrt{1-V^2}}\end{aligned} \tag{9.8.10}$$

Von $\tilde{T}_2$ zu $\tilde{T}_3$:

$$g = -a_0 < 0, \quad a_0 d'_{23} = -a_0 \tilde{x}_e(\tilde{T}_2) = 2 \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad v_0 = 0 \tag{9.8.11}$$

Vergleich mit (9.3.5) zeigt, dass

$$d'_{23} = 2D \tag{9.8.12}$$

gilt. Dies ist plausibel, da das Raumschiff nach diesem konstant beschleunigten Abschnitt relativ zum Erdsystem ruht.

Die vorstehenden Parameter in (9.6.17) eingesetzt führt zu

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{\tau}_e(23) &= \frac{1 + a_0 d'_{23}}{a_0} \cdot \tanh\big(a_0(\tilde{T}_3 - \tilde{T}_2)\big) \\
&= \frac{1 + a_0 \tilde{d}_{23}}{a_0} \cdot V \\
&= \frac{1 + \dfrac{2(1 - \sqrt{1 - V^2})}{\sqrt{1 - V^2}}}{a_0} \cdot V \\
&= \frac{2}{a_0} \cdot \frac{V}{\sqrt{1 - V^2}} - \frac{V}{a_0} \quad .
\end{aligned} \tag{9.8.13}$$

Für den Anfangsort der Erde im nächsten Abschnitt ergibt sich im System $\tilde{S}$ mit obigen Parametern durch Einsetzen in (9.6.12):

$$\begin{aligned}
-a_0\, \tilde{x}_e(\tilde{T}_3\,) &= \frac{1 + a_0 d'_{23}}{\cosh\Big(a_0(\tilde{T}_3 - \tilde{T}_2)\Big)} - 1 \\
&= \frac{1 + \dfrac{2(1 - \sqrt{1 - V^2})}{\sqrt{1 - V^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2}}} - 1 \\
&= 1 - \sqrt{1 - V^2} \quad .
\end{aligned} \tag{9.8.14}$$

Von $\tilde{T}_3$ zu $\tilde{T}_4$:

$$g = a_0 > 0, \quad a_0 d'_{34} = -a_0\, \tilde{x}_e(\tilde{T}_3\,) = 1 - \sqrt{1-V^2}, \quad v_0 = -V \tag{9.8.15}$$

Wie zu erwarten ist $d'_{34} = d'_{12}$.

Dies in (9.6.17) eingesetzt führt analog wie oben zu

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{\tau}_e(34) &= \frac{1}{a_0} \cdot \frac{(1-a_0 d'_{34})\sqrt{1-V^2}\ \ \tanh\big(a_0(\tilde{T}_4 - \tilde{T}_3)\big)}{1 - V\tanh\big(a_0(\tilde{T}_4 - \tilde{T}_3)\big)} \\
&= \frac{1}{a_0} \cdot \frac{(1-a_0 d'_{34})\sqrt{1-V^2}\ \ \cdot V}{1 - V\cdot V} \\
&= \frac{1-a_0 d'_{34}}{a_0} \cdot \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \\
&= \frac{1-(1-\sqrt{1-V^2})}{a_0} \cdot \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \quad = \quad \frac{V}{a_0} \qquad .
\end{aligned} \tag{9.8.16}$$

Einsetzten der obigen Parametern in (9.6.12)

$$\begin{aligned}
a_0\, \tilde{x}_e(\tilde{T}_4\,) &= \frac{1-a_0 d'_{34}}{\cosh\Big(a_0(\tilde{T}_4 - \tilde{T}_3)\Big) - V\sinh\Big(a_0(\tilde{T}_4 - \tilde{T}_3)\Big)} - 1 \\
&= \frac{1-(1-\sqrt{1-V^2})}{\dfrac{1}{\sqrt{1-V^2}} - V\cdot\dfrac{V}{\sqrt{1-V^2}}} - 1 \quad = \quad 0
\end{aligned} \tag{9.8.17}$$

und in (9.6.13)

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_e(\tilde{T}_4) &= -(1-a_0 d'_{34}) \cdot \frac{\sinh\Big(a_0(\tilde{T}_4 - \tilde{T}_3)\Big) - V\cosh\Big(a_0(\tilde{T}_4 - \tilde{t}_3)\Big)}{\Big(\cosh\Big(a_0(\tilde{T}_4 - \tilde{T}_3)\Big) - V\sinh\Big(a_0(\tilde{T}_4 - \tilde{T}_3)\Big)\Big)^2} \\
&= -\frac{(1-a_0 d'_{34}) \cdot \left(\dfrac{V}{\sqrt{1-V^2}} - V\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-V^2}}\right)}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-V^2}} - V\cdot\dfrac{V}{\sqrt{1-V^2}}\right)} \quad = \quad 0
\end{aligned} \tag{9.8.18}$$

zeigt, dass das Raumschiff wieder auf der Erde gelandet ist.

Die gesamte verstrichene Zeit auf der Erde

... aus Sicht des Raumschiffes wird damit

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\tau}_e &= \Delta\tilde{\tau}_e(01) + \Delta\tilde{\tau}_e(12) + \Delta\tilde{\tau}_e(23) + \Delta\tilde{\tau}_e(34)\\ &= \frac{V}{a_0} + \frac{1+a_0 d'_{12}}{a_0}\cdot\frac{V}{\sqrt{1-V^2}} + \frac{1+a_0 d'_{23}}{a_0}\cdot V + \frac{1-a_0 d'_{34}}{a_0}\cdot\frac{V}{\sqrt{1-V^2}}\\ &= \frac{V}{a_0} + \left(\frac{2}{a_0}\cdot\frac{V}{\sqrt{1-V^2}} - \frac{V}{a_0}\right) + \left(\frac{2}{a_0}\cdot\frac{V}{\sqrt{1-V^2}} - \frac{V}{a_0}\right) + \frac{V}{a_0}\\ &= \frac{4}{a_0}\cdot\frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \quad . \end{aligned} \tag{9.8.19}$$

Dieser Wert stimmt mit (9.3.8) überein und es folgt

$$\Delta\tilde{\tau}_r = \frac{4}{a_0}\cdot\operatorname{arsinh}(a_0\Delta T) \;<\; \frac{4}{a_0}\cdot a_0\Delta T = \frac{4}{a_0}\cdot\frac{V}{\sqrt{1-V^2}} = \Delta\tilde{\tau}_e \tag{9.8.20}$$

Also auch aus Sicht des Raumschiffes vergeht seine Zeit langsamer als die auf der Erde.

9.9 Berücksichtigung einer Gleitphase

Ein Raumflug besteht nun allerdings nicht nur aus Beschleunigungsphasen und Bremsphasen, sondern üblicherweise dazwischen jeweils aus einer Phase mit konstanter Reisegeschwindigkeit. Diese Gleitphase kann in obiger Betrachtung problemlos berücksichtigt werden. In der Gleitphase ist das Eigensystem des Raumschiffes natürlich das Inertialsystem S'.

Die Gleitphase kann man durch seine Länge oder seine Dauer im System der Erde oder des Raumschiffes festlegen. Nachstehend wird sie durch ihre Länge im System der Erde festgelegt. Bezeichnet

- L die Länge einer Gleitstrecke im System der Erde und
- L' die Länge einer Gleitstrecke aus Sicht des Raumschiffes

dann gilt aufgrund der Längenkontraktion

$$L' = L\cdot\sqrt{1-V^2} \quad . \tag{9.9.1}$$

Eine solche Gleitphase soll jeweils einmal auf der Hinreise und einmal auf der Rückreise auftreten. Weiterhin werden die Bezeichnungen

- T: Dauer der Gleitphase im System der Erde aus eigener Sicht
- T_r: Dauer der Gleitphase im System der Erde aus Sicht des Raumschiffes
- T': Dauer der Gleitphase im System des Raumschiffes aus eigener Sicht
- T'_e: Dauer des Gleitphase im System des Raumschiffes aus Sicht der Erde

verwendet. Aufgrund der Zeitdilatation folgt aus Sicht der jeweiligen Systeme

$$T'_e = T \cdot \sqrt{1 - V^2} \tag{9.9.2}$$

$$T_r = T' \cdot \sqrt{1 - V^2} \quad . \tag{9.9.3}$$

Mit obigen Festlegungen gilt

$$L = V \cdot T \qquad \text{sowie} \qquad L' = V \cdot T' \quad . \tag{9.9.4}$$

Nach diesen Vorüberlegungen können die neuen Reisezeiten aus Sicht der beiden Systeme berechnet werden.

Reisezeiten aus Sicht der Erde:

Aus Sicht eines Beobachters auf der Erde ist die gesamte Reisezeit des Raumschiffes

$$\begin{aligned} \Delta\tau_e^+ &= 2T + \Delta\tau_e \\ &= \frac{2L}{V} + \Delta\tau_e \quad . \end{aligned} \tag{9.9.5}$$

Aus seiner Sicht ist dabei auf dem Raumschiff die Zeit

$$\begin{aligned} \Delta\tau_r^+ &= 2T'_e + \Delta\tau_r \;=\; 2T \cdot \sqrt{1 - V^2} + \Delta\tau_r \\ &= \frac{2L}{V} \cdot \sqrt{1 - V^2} + \Delta\tau_r \end{aligned} \tag{9.9.6}$$

vergangen. Da $\sqrt{1 - V^2} \leq 1$ ist, folgt, dass weiterhin für die Reisezeiten aus Sicht der Erde grundsätzlich immer $\Delta\tau_r^+ < \Delta\tau_e^+$ gilt.

Reisezeiten aus Sicht des Raumschiffes:

Aus Sicht des Raumschiffes ist seine gesamte Reisezeit

$$\Delta\tilde{\tau}_r^+ = 2T' + \Delta\tilde{\tau}_r = \frac{2L'}{V} + \Delta\tilde{\tau}_r \;=\; \frac{2L\cdot\sqrt{1-V^2}}{V} + \Delta\tilde{\tau}_r \qquad . \tag{9.9.7}$$

Um die aus Sicht des Raumschiffes dabei auf der Erde verstrichene Zeit berechnen zu können, ist zu beachten, dass die erste Bremsphase von $\tilde{T}_1 \to \tilde{T}_2$ sowie die zweite Beschleunigungsphase von $\tilde{T}_2 \to \tilde{T}_3$ nun in einem anderen Abstand von der Erde stattfinden. Für d'_{12} und d'_{23} sind die korrespondierenden Längen der Gleitphasen im System S' zu berücksichtigen; d.h. die zusätzlichen Strecken

$$\Delta d'_{12} = L\sqrt{1-v_0^2(12)} = L\sqrt{1-V^2} \tag{9.9.8}$$

$$\Delta d'_{23} = L\sqrt{1-v_0^2(23)} = L \qquad . \tag{9.9.9}$$

Aus Sicht des Raumschiffes ergibt sich damit für die während der gesamten Reise auf der Erde vergangene Zeit

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{\tau}_e^+ &= 2T_r + \frac{V}{a_0} + \frac{1+a_0(d'_{12}+\Delta d'_{12})}{a_0}\cdot\frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \\
&\quad + \frac{1+a_0(d'_{23}+\Delta d'_{23})}{a_0}\cdot V + \frac{1-a_0 d'_{34}}{a_0}\cdot\frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \\
&= 2T'\cdot\sqrt{1-V^2} + \Delta d'_{12}\cdot\frac{V}{\sqrt{1-V^2}} + \Delta d'_{23}\cdot V + \Delta\tilde{\tau}_e \\
&= \frac{2L'}{V}\cdot\sqrt{1-V^2} + L\sqrt{1-V^2}\cdot\frac{V}{\sqrt{1-V^2}} + L\cdot V + \Delta\tilde{\tau}_e \\
&= \frac{2L}{V}\cdot(1-V^2) + 2LV + \Delta\tilde{\tau}_e \\
&= \quad \frac{2L}{V} + \Delta\tilde{\tau}_e \qquad .
\end{aligned} \tag{9.9.10}$$

Der Vergleich mit den Reisezeiten aus Sicht eines Beobachters auf der Erde zeigt, dass auch bei Berücksichtigung von Gleitphasen

$$\Delta\tilde{\tau}_e = \Delta\tau_e \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta\tilde{\tau}_e^+ = \Delta\tau_e^+ \tag{9.9.11}$$

$$\Delta\tilde{\tau}_r = \Delta\tau_r \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta\tilde{\tau}_r^+ = \Delta\tau_r^+ \tag{9.9.12}$$

gilt und beide Sichtweisen betreffend der gesamten Reisezeit übereinstimmen, obwohl sie sich für die einzelnen Phasen der Reise erheblich unterscheiden.

9.10 Eine verbleibende Unstetigkeit

Am Ende der ersten Beschleunigungsphase direkt vor Beginn der Gleitphase ist die Geschwindigkeit der Erde aus Sicht des Raumschiffes nach (9.6.13)

$$\begin{aligned}\tilde{v}_e(\tilde{T}_1)\Big|_{\tilde{T}_0\to\tilde{T}_1} &= -\frac{\sinh\Big(a_0(\tilde{T}_1-\tilde{T}_0)\Big)}{\Big(\cosh\Big(a_0(\tilde{T}_1-\tilde{T}_0)\Big)\Big)^2} = -\frac{\dfrac{V}{\sqrt{1-V^2}}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-V^2}}\right)^2} \\ &= -V\sqrt{1-V^2} \quad , \end{aligned} \tag{9.10.13}$$

wogegen nach dem Ende der Beschleunigungsphase direkt nach Beginn der Gleitphase die Geschwindigkeit der Erde aus Sicht des Raumschiffes

$$v'_e(T'_1)\Big|_{\text{Gleitphase ab } \tilde{T}_1} = -V \tag{9.10.14}$$

beträgt. Es tritt aus Sicht des Raumschiffes ein Sprung in der Geschwindigkeit der Erde auf. Die Ursache hierfür liegt darin, dass der Übergang zwischen den Koordinatensystemen des beschleunigten Systems $\tilde{S}$ und dem Inertialsystem S' ebenfalls sprunghaft und nicht kontinuierlich erfolgt. Physikalisch findet der Übergang natürlich kontinuierlich durch die kontinuierliche Verringerung (wenn auch meist in sehr kurzer Zeit) der Beschleunigung statt.

9.11 Anwendung der ART

Bis auf die Berechnung der Eigenzeit der Erde aus Sicht des beschleunigten Raumschiffes konnten alle anderen Eigenzeiten im Rahmen der engeren SRT im Inertialsystem der Erde durchgeführt werden. Die Anwendung der ART macht deshalb nur Sinn für die Berechnung der Eigenzeit der Erde aus Sicht des Raumschiffes. Diese ist im Rahmen der ART relativ geradlinig. Die Herausforderung liegt dabei weniger in der Physik, sondern eher in der Mathematik. An dieser Stelle sollen nur wieder die Beschleunigungsphasen betrachtet werden. Ebenso werden die $\tilde{y},\tilde{z}$-Koordinaten nicht mitgeführt.

Je nach der Beschleunigungsphase unterliegen Objekte vom Raumschiff aus gesehen anscheinend einer konstanten Beschleunigung in eine der Richtungen der $\tilde{x}$-Achse. Die Erde scheint aus Sicht des Raumschiffes in den einzelnen Phasen jeweils der Beschleunigung $a_e = -\tilde{g}$ zu unterliegen. Klassisch würde

das Raumschiff dies der Existenz eines Gravitationspotentials

$$\Phi(\tilde{x}) = \tilde{g}\tilde{x} \qquad \Longrightarrow \qquad a_e = -\frac{d\Phi(\tilde{x})}{d\tilde{x}} = -\tilde{g} \tag{9.11.1}$$

zuschreiben. Da die Beschleunigung und damit das fiktive Gravitationsfeld zeitlich konstant sind, kann man nach dem Äquivalenzprinzip das System $\tilde{S}$ des Raumschiffes in der allgemeinsten Form mit zunächst beliebigen Funktionen $\alpha(\tilde{x})$ und $\beta(\tilde{x})$ durch die Metrik

$$ds^2 = e^{\alpha(\tilde{x})}d\tilde{t}^2 - e^{\beta(\tilde{x})}d\tilde{x}^2 \tag{9.11.2}$$

charakterisieren. Durch eine geeignete Wahl der $\tilde{x}$-Koordinate kann man immer eine Darstellung in der vereinfachten Form

$$ds^2 = e^{\alpha(\tilde{x})}d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2 \tag{9.11.3}$$

erreichen. Dies ist die Basis für die Anwendung der ART. Es reicht dabei, die Beschleunigungsphase direkt nach dem Start sowie die vom Umkehrpunkt zur Erde zu betrachten, da die Metrik invariant bei Zeitumkehr ist und deshalb

$$\Delta\tilde{\tau}_e(34) = \Delta\tilde{\tau}_e(01) \qquad \text{sowie} \qquad \Delta\tilde{\tau}_e(12) = \Delta\tilde{\tau}_e(23) \tag{9.11.4}$$

sein muss. Dies vereinfacht die Rechnungen, da zu Beginn jedes dieser Abschnitte das Raumschiff relativ zur Erde ruht.

Die Funktion $\alpha(\tilde{x})$ erhält man durch Auswertung der Einstein-Gleichung für das Vakuum

$$R_{\nu\mu} = 0 \tag{9.11.5}$$

zusammen mit der Forderung, dass sich im klassische Grenzfall

$$g_{00} \quad \xrightarrow{\tilde{g} \to 0} \quad 1 + 2\Phi(\tilde{x}) = 1 + 2\tilde{g}\tilde{x} \tag{9.11.6}$$

ergeben muss. Setzt man

$$g_{00} = e^{\alpha(\tilde{x})}; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 \quad \text{sowie} \quad g_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu \tag{9.11.7}$$

in den affinen Zusammenhang

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\Big(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\Big) \tag{9.11.8}$$

ein, so ergeben sich die von Null verschiedenen Komponenten:

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}\, g^{00}\Big(\partial_1 g_{00}\Big) = \frac{1}{2}\, e^{-\alpha(\tilde{x})}\alpha'(\tilde{x})e^{\alpha(\tilde{x})} = \frac{1}{2}\,\alpha'(\tilde{x}) \tag{9.11.9}$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\, g^{11}\Big(-\partial_1 g_{00}\Big) = \frac{1}{2}\,(-1)\Big(-\alpha'(\tilde{x})e^{\alpha(\tilde{x})}\Big) = \frac{1}{2}\,\alpha'(\tilde{x})e^{\alpha(\tilde{x})} \tag{9.11.10}$$

Damit ergeben sich für den Ricci-Tensor

$$R_{\nu\mu} = \partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma^\rho_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho\nu} \tag{9.11.11}$$

aufgrund seiner Indexstruktur die von Null verschiedenen Komponenten

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\rho\Gamma^\rho_{00} - \partial_0\Gamma^\rho_{\rho 0} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{00} - \Gamma^\rho_{0\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho 0} = \partial_1\Gamma^1_{00} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10} \\ &= \left(\frac{1}{2}\,\alpha''(\tilde{x})e^{\alpha(\tilde{x})} + \frac{1}{2}\,\alpha'^2(\tilde{x})e^{\alpha(\tilde{x})}\right) - \frac{1}{4}\,\alpha'^2(\tilde{x})e^{\alpha(\tilde{x})} \\ &= \left(\frac{1}{2}\,\alpha''(\tilde{x}) + \frac{1}{4}\,\alpha'^2(\tilde{x})\right)e^{\alpha(\tilde{x})} \end{aligned} \tag{9.11.12}$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_\rho\Gamma^\rho_{11} - \partial_1\Gamma^\rho_{\rho 1} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{11} - \Gamma^\rho_{1\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho 1} = -\partial_1\Gamma^0_{01} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} \\ &= -\frac{1}{2}\,\alpha''(\tilde{x}) - \frac{1}{4}\,\alpha'^2(\tilde{x}) \qquad . \end{aligned} \tag{9.11.13}$$

Die Einstein-Gleichung (9.11.5) geht damit in die Differentialgleichung

$$\alpha''(\tilde{x}) + \frac{1}{2}\,\alpha'^2(\tilde{x}) = 0 \tag{9.11.14}$$

mit der Lösung

$$\alpha(\tilde{x}) = 2\,\ln\big(k_1 + k_2\tilde{x}\big) \tag{9.11.15}$$

über. Auftretende Integrationskonstanten werden ab hier mit k_i bezeichnet. Der Vergleich mit dem klassischen Grenzfall (9.11.6) liefert die Identifikation

$$g_{00} = \big(k_1 + k_2\tilde{x}\big)^2 \quad \longrightarrow \quad k_1 = 1; \quad k_2 = \tilde{g} \qquad . \tag{9.11.16}$$

Hieraus ergibt sich schließlich die Metrik, die einer konstant beschleunigten Bewegung entspricht, zu

$$ds^2 = \big(1 + \tilde{g}\tilde{x}\big)^2 d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2 \qquad . \tag{9.11.17}$$

Für den affinen Zusammenhang folgt

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{d}{d\tilde{x}} \ln\bigl(1+\tilde{g}\tilde{x}\bigr) = \frac{\tilde{g}}{1+\tilde{g}\tilde{x}} \tag{9.11.18}$$

$$\Gamma^1_{00} = \left(\frac{d}{d\tilde{x}} \ln\bigl(1+\tilde{g}\tilde{x}\bigr)\right) e^{\ln\left(1+\tilde{g}\tilde{x}\right)^2} = \tilde{g}\bigl(1+\tilde{g}\tilde{x}\bigr) \quad . \tag{9.11.19}$$

Die Erde bewegt sich in dieser Raumzeit entlang der geodätische Kurve

$$\frac{d^2\tilde{x}^\rho}{ds^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \frac{d\tilde{x}^\mu}{ds} \frac{d\tilde{x}^\nu}{ds} = 0 \quad . \tag{9.11.20}$$

Für die beiden relevanten Koordinaten folgt:

$$\rho = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2\tilde{t}}{ds^2} + \frac{2\tilde{g}}{1+\tilde{g}\tilde{x}} \frac{d\tilde{t}}{ds} \frac{d\tilde{x}}{ds} = 0 \tag{9.11.21}$$

$$\rho = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + \tilde{g}\bigl(1+\tilde{g}\tilde{x}\bigr) \frac{d\tilde{t}}{ds} \frac{d\tilde{t}}{ds} = 0 \tag{9.11.22}$$

Ausnutzung von (9.11.17) führt für die Ortskoordinate zu der DGL

$$\bigl(1+\tilde{g}\tilde{x}\bigr)\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + \tilde{g}\left(1+\left(\frac{d\tilde{x}}{ds}\right)^2\right) = 0 \tag{9.11.23}$$

mit der Lösung

$$\tilde{x} = \sqrt{k_4^2 - (s+k_3)^2} - \frac{1}{\tilde{g}} \tag{9.11.24}$$

sowie deren Ableitung

$$\tilde{v}(s) = \frac{d\tilde{x}}{ds} = \frac{-(s+k_3)}{\sqrt{k_4^2-(s+k_3)^2}} \quad . \tag{9.11.25}$$

Nun ist in der ersten und der dritten Phase der Beschleunigung $\tilde{v}(0) = 0$, was zu $k_3 = 0$ und weiter für die Ortskoordinate zu

$$\tilde{x} = \sqrt{k_4^2 - s^2} - \frac{1}{\tilde{g}} \qquad \Longrightarrow \qquad 1+\tilde{g}\tilde{x} = \tilde{g}\sqrt{k_4^2-s^2} \tag{9.11.26}$$

führt. Dies in die Beziehung für die Zeitkoordinate eingesetzt liefert die DGL

$$\frac{d^2\tilde{t}}{ds^2} + \left(\frac{2\tilde{g}}{\tilde{g}\sqrt{k_4^2-s^2}}\right) \frac{d\tilde{t}}{ds} \left(\frac{-s}{\sqrt{k_4^2-s^2}}\right)$$

$$= \frac{d^2\tilde{t}}{ds^2} - \frac{2s}{\bigl(k_4^2-s^2\bigr)} \frac{d\tilde{t}}{ds} = 0 \tag{9.11.27}$$

mit der Lösung

$$\tilde{t} = \frac{k_5 \tanh^{-1}(s/k_4)}{k_4} + k_6 \tag{9.11.28}$$

sowie deren Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{t}}{ds} &= \frac{k_5}{k_4} \cdot \frac{d}{ds}\left(\tanh^{-1}(s/k_4)\right) = \frac{k_5}{2k_4}\frac{d}{ds}\left(\frac{\ln(1+s/k_4)}{\ln(1-s/k_4)}\right) \\ &= \frac{k_5}{2k_4}\left(\frac{1}{k_4+s} - \frac{-1}{k_4-s}\right) \quad = \quad \frac{k_5}{k_4^2-s^2} \quad . \end{aligned} \tag{9.11.29}$$

Die Ableitungen in (9.11.17) eingesetzt

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1+\tilde{g}\tilde{x}\right)^2 \left(\frac{d\tilde{t}}{ds}\right)^2 - \left(\frac{d\tilde{x}}{ds}\right)^2 \\ &= \tilde{g}^2(k_4^2-s^2)\left(\frac{k_5}{k_4^2-s^2}\right)^2 - \frac{s^2}{k_4^2-s^2} \quad = \quad \frac{\tilde{g}^2k_5^2-s^2}{k_4^2-s^2} \end{aligned} \tag{9.11.30}$$

führt zu der Identifikation $\tilde{g}k_5 = k_4$. Zusammen mit der zweckmäßigen Festlegung $k_6 = t_0$ ergibt sich durch einfache Umformung aus (9.11.28)

$$s/k_4 = \tanh\left(\tilde{g}(\tilde{t}-\tilde{t}_0)\right) \quad . \tag{9.11.31}$$

Hiermit können nun die Eigenzeiten der Erde aus Sicht des Raumschiffes für die Beschleunigungsphasen ermittelt werden.

Beschleunigungsphase von $\tilde{T}_0$ zu $\tilde{T}_1$:

$$\tilde{g} = a_0 > 0\,, \qquad s_{01}(\tilde{T}_0) = 0\,, \qquad \tilde{x}(0) = 0 \tag{9.11.32}$$

Dies in (9.11.26) eingesetzt ergibt

$$0 = \sqrt{k_4^2 - 0^2} - \frac{1}{a_0} \qquad \Longrightarrow \qquad k_4 = \frac{1}{a_0} \quad , \tag{9.11.33}$$

was dann für die Weltlinie zu

$$a_0 s_{01} = \tanh\left(a_0(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)\right) \tag{9.11.34}$$

führt.

Beschleunigungsphase von $\tilde{T}_2$ zu $\tilde{T}_3$:

$$\tilde{g} = -a_0 < 0\,, \qquad s_{23}(\tilde{T}_2) = 0\,, \qquad \tilde{x}(0) = -2D \tag{9.11.35}$$

Die letzte Randbedingung ergibt sich daraus, dass das Raumschiff und die Erde sich am Umkehrpunkt ruhend im gleichen augenblicklichen Inertialsystem befinden. Dies in (9.11.26) eingesetzt ergibt

$$-2D = \sqrt{k_4^2 - 0^2} + \frac{1}{a_0} \qquad \Longrightarrow \qquad k_4 = -\frac{2a_0D + 1}{a_0} \quad , \tag{9.11.36}$$

was dann für die Weltlinie zu

$$a_0 s_{23} = (2a_0D + 1)\tanh\Big(a_0(\tilde{T}_3 - \tilde{T}_2)\Big) \tag{9.11.37}$$

führt.

Die gesamte verstrichene Zeit auf der Erde

... aus Sicht des Raumschiffes wird damit

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\tau}_e &= 2s_{01} + 2s_{23} \qquad (9.11.38)\\ &= \frac{2}{a_0}\cdot\tanh\Big(a_0(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)\Big) + \frac{2}{a_0}\cdot\big(2a_0D + 1\big)\cdot\tanh\Big(a_0(\tilde{T}_3 - \tilde{T}_2)\Big) \quad .\end{aligned}$$

Das Raumschiff ruht im Ursprung seines System $\tilde{S}$. Nach (9.4.1) gilt für die zeitliche Dauer der Beschleunigungsphasen aus Sicht des Raumschiffes

$$\tilde{T}_i - \tilde{T}_j \;=\; \frac{1}{a_0}\cdot\operatorname{artanh}(V) \qquad . \tag{9.11.39}$$

Nutzt man dies für die Auswertung von (9.11.38) aus, so ergibt mit D nach (9.3.5) schließlich

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\tau}_e &= \frac{2}{a_0}\cdot V + \frac{2}{a_0}\cdot\big(2a_0D + 1\big)\cdot V\\ &= 2\cdot\frac{V}{a_0} + 2\cdot\left(\frac{2}{a_0}\cdot\frac{V}{\sqrt{1-V^2}} - \frac{V}{a_0}\right)\\ &= \frac{4}{a_0}\cdot\frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \qquad .\end{aligned} \tag{9.11.40}$$

Dies stimmt natürlich mit der Sicht des Beobachters auf der Erde überein. Man sieht auch, dass die vom Raumschiff aus gesehenen einzelnen Phasen der Beschleunigung, den früher gewonnenen Ergebnissen entsprechen.

Eine analoge Rechnung wie oben findet sich in [Per79]. Ausgehend von dem Ansatz (9.11.2) wird in den mit $\bar{t}, \bar{x}$ bezeichneten Koordinaten die Metrik

$$ds^2 = e^{2\bar{g}\bar{x}} d\bar{t}^2 - e^{2\bar{g}\bar{x}} d\bar{x}^2 \tag{9.11.41}$$

abgeleitet. Die weiteren Rechnungen führen für die beiden betrachteten Beschleunigungsphasen dann auf die gleichen Ergebnisse wie oben

$$\Delta\bar{\tau}_e(ji) = \Delta\tilde{\tau}_e(ji) \qquad . \tag{9.11.42}$$

Dies ist nicht weiter überraschend, da die Bogenlänge entlang der Weltlinie in einem Abschnitt unabhängig vom gewählten Koordinatensystem ist, in dem sie dargestellt wird. Die Koordinatentransformation zwischen den beiden Systemen ist in diesem Fall einfach durch

$$1 + \tilde{g}\tilde{x} = e^{\tilde{g}\bar{x}} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{x} = \frac{1}{\tilde{g}}\Big(e^{\tilde{g}\bar{x}} - 1\Big) \tag{9.11.43}$$

gegeben.

9.12 Abschließende Anmerkungen

Für die nachfolgende Diskussion wird zur besseren Übersichtlichkeit nur der erste Beschleunigungsabschnitt betrachtet. Für diesen Abschnitt ist die Koordinatentransformation zwischen dem System S der Erde und dem System $\tilde{S}$ des Raumschiffes dann:

$$t = \left(\frac{1}{a_0} + \tilde{x}\right) \sinh\big(a_0\tilde{t}\big) \tag{9.12.1}$$

$$x = \left(\frac{1}{a_0} + \tilde{x}\right) \cosh\big(a_0\tilde{t}\big) - \frac{1}{a_0} \tag{9.12.2}$$

Beim Start fallen die Ursprünge der beiden Koordinatensysteme zusammen

$$(t, x) = (0, 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\tilde{t}, \tilde{x}) = (0, 0) \qquad . \tag{9.12.3}$$

Das nicht indizierte Symbol t stand und steht dabei ausschließlich für die Zeit, die im System S auf einer Uhr aus Sicht der Erde abzulesen ist. Per Definition ist die Zeitkoordinate im System $\tilde{S}$ durch die Forderung ($\tilde{T}_0 = T_0 = 0$)

$$T_1 = \frac{1}{a_0} \cdot \sinh\big(a_0\tilde{T}_1\big) = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{V}{\sqrt{1 - V^2}} \tag{9.12.4}$$

parametrisiert worden. Wenn die Uhr auf der Erde $t = T_1$ anzeigt, soll die Uhr im Raumschiff $\tilde{t} = \tilde{T}_1$ anzeigen; d.h. im System $\tilde{S}$ endet die Beschleunigungsphase zum Zeitpunkt $\tilde{T}_1$. Aus Sicht der Erde endet die Beschleunigungsphase in beiden Systemen an verschiedenen Orten, aber gleichzeitig.

Aus Sicht des Raumschiffes wird wegen $x_e = 0$

$$t_r = \left(\frac{1}{a_0} + \tilde{x}_e\right) \sinh\left(a_0 \tilde{t}\right) \tag{9.12.5}$$

$$0 = \left(\frac{1}{a_0} + \tilde{x}_e\right) \cosh\left(a_0 \tilde{t}\right) - \frac{1}{a_0} \quad , \tag{9.12.6}$$

wobei $\tilde{x}_e(\tilde{t})$ der Ort der Erde im System des Raumschiffes zum Zeitpunkt $\tilde{t}$ ist und im System S auf einer Uhr aus Sicht des Raumschiffes die Zeit t_r abzulesen ist. Addition von 1 auf beiden Seiten der zweiten Beziehung und Division der beiden Beziehungen liefert

$$t_r = \frac{1}{a_0} \cdot \tanh\left(a_0 \tilde{t}\right) \quad . \tag{9.12.7}$$

Wenn die Beschleunigungsphase für das Raumschiff endet, zeigt die Uhr auf der Erde aus Sicht des Raumschiffes

$$T_{r1} = \frac{1}{a_0} \cdot \tanh\left(a_0 \tilde{T}_1\right) = \frac{V}{a_0} \tag{9.12.8}$$

an. Aus Sicht des Raumschiffes sind die beiden Zeitpunkte $\tilde{T}_1$ und T_{r1} also gleichzeitig, aber nicht die Zeitpunkte $\tilde{T}_1$ und T_1.

Im vorherigen Text habe ich nicht explizit auf den wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Beziehungen (9.12.4) und (9.12.8) hingewiesen. Die Linien der Gleichzeitigkeit der beiden Systeme S und $\tilde{S}$ unterscheiden sich. Dies ist der Grund, warum sich die beiden Sichten auf die Dauer der einzelnen Beschleunigungsphasen jeweils unterscheiden.

Kapitel 10

Das Photon in der ART

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass das Maxwell-Feld unter bestimmten Voraussetzungen als Photonteilchen interpretiert werden kann, das sich wie ein masseloses Teilchen entlang geodätischer Bahnen bewegt.

10.1 Die Maxwell-Gleichungen in der SRT

Die elektromagnetische Wechselwirkung wird in der Speziellen Relativitätstheorie durch die drei Beziehungen

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = j^\beta \tag{10.1.1}$$

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \tag{10.1.2}$$

$$m\,\frac{du^\alpha}{d\tau} = q\,F^{\alpha\beta}u_\beta \tag{10.1.3}$$

beschrieben. Dabei ist

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\beta}{d\tau}\,\partial_\beta u^\alpha = u^\beta \partial_\beta u^\alpha \qquad . \tag{10.1.4}$$

Die ersten beiden Beziehungen sind die Maxwell-Gleichungen und die dritte Beziehung beinhaltet die Lorentz-Kraft die auf ein Teilchen mit der Ladung q und der Masse m bei der 4er-Geschwindigkeit u wirkt. Führt man über

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \tag{10.1.5}$$

das Maxwell-Feld A_α ein, dann ist die zweite Maxwell-Gleichung automatisch erfüllt. Ohne elektromagnetische Quellen gilt dann für das freie Maxwell-Feld

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha = \partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha = 0 \qquad . \tag{10.1.6}$$

In der Lorentz-Eichung

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \tag{10.1.7}$$

ergibt sich für das Maxwell-Feld dann die Wellengleichung

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = 0 \qquad . \tag{10.1.8}$$

Zur Vorbereitung der folgenden Betrachtungen soll diese nun rein formal gelöst werden. Hierzu wählt man den Lösungsansatz

$$A^\alpha(x) = a^\alpha e^{iS(x)} \tag{10.1.9}$$

mit einer festen Polarisation a^α und einer reellen Phase $S(x)$. Aus der Lorentz-Eichung folgt

$$\partial_\alpha \left(a^\alpha e^{iS}\right) = a^\alpha \, i \left(\partial_\alpha S\right) e^{iS} = 0 \tag{10.1.10}$$

und aus der Wellengleichung

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \left(a^\beta e^{iS}\right) = i a^\beta \left(\partial^\alpha \partial_\alpha S\right) e^{iS} - a^\beta \left(\partial_\alpha S\right) \left(\partial^\alpha S\right) e^{iS} = 0 \qquad . \tag{10.1.11}$$

Diese Gleichungen sind genau dann erfüllt, wenn die drei Bedingungen

$$a^\alpha \partial_\alpha S = 0 \tag{10.1.12}$$

$$\partial^\alpha \partial_\alpha S = 0 \tag{10.1.13}$$

$$(\partial^\alpha S)(\partial_\alpha S) = 0 \tag{10.1.14}$$

gelten. Führt man den 4er-Wellenvektor

$$k_\alpha = \partial_\alpha S \tag{10.1.15}$$

ein, kann man diese Bedingungen in

$$a^\alpha k_\alpha = 0 \tag{10.1.16}$$

$$\partial^\alpha k_\alpha = 0 \tag{10.1.17}$$

$$k^\alpha k_\alpha = 0 \tag{10.1.18}$$

umschreiben. Die erste Bedingung besagt, dass die Polarisation orthogonal zum Wellenvektor ist. Die zweite Bedingung kann man mit einem konstanten Wellenvektor

$$(k^\alpha) = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (k_\alpha) = \begin{pmatrix} \omega \\ -\vec{k} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad S(x) = k_\mu x^\mu \tag{10.1.19}$$

erfüllen. Die dritte Bedingung bedeutet, dass das Maxwell-Feld lichtartig ist und liefert

$$\omega^2 + \vec{k} \cdot (-\vec{k}\,) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \left|\vec{k}\right| \qquad . \tag{10.1.20}$$

Damit hat man schließlich

$$A^\alpha(x) = a^\alpha e^{ik_\mu x^\mu} = a^\alpha e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{x}\right)} \tag{10.1.21}$$

als Lösung der Wellengleichung.

10.2 Die Maxwell-Gleichungen in der ART

Durch den Übergang zu kovarianten Ableitungen erhält man für die Maxwell-Gleichungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{10.2.1}$$

$$\nabla_\rho F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} = 0 \qquad . \tag{10.2.2}$$

Weiter folgt unter Ausnutzung von (10.1.4) nach Übergang zu kovarianten Ableitungen für die Wechselwirkung mit Materie aus (10.1.3)

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \frac{dx^\nu}{d\tau}\,\partial_\nu u^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho \;=\; \frac{q}{m}\, F^{\mu\nu} u_\nu \quad . \tag{10.2.3}$$

Aus der Antisymmetrie des Feldstärketensors folgt die Ladungserhaltung

$$\nabla_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla_\nu j^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, j^\nu\right) = 0 \tag{10.2.4}$$

auch in der ART. Ohne elektromagnetische Quellen ergibt sich mit

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{10.2.5}$$

für das freie Maxwell-Feld

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu\nu} &= \nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu - \nabla_\mu \nabla^\nu A^\mu \\ &= \nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu \nabla_\mu A^\mu - g^{\nu\rho} R_{\sigma\rho} A^\sigma = 0 \qquad , \end{aligned} \tag{10.2.6}$$

wobei die für kovariante Ableitungen geltende Beziehung

$$\Big(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu\Big) V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma \tag{10.2.7}$$

ausgenutzt wurde. In der Lorentz-Eichung

$$\nabla_\mu A^\mu = 0 \tag{10.2.8}$$

ergibt sich damit in der Wellengleichung

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu - g^{\nu\rho} R_{\rho\mu} A^\mu = 0 \tag{10.2.9}$$

ein inhomogener Term. Man beachte, dass der Übergang zu kovarianten Ableitungen in der Wellengleichung (10.1.8) ein falsches Resultat geliefert hätte! Die Lösung dieser Wellengleichung ist nur in wenigen Sonderfällen analytisch möglich, da die einzelnen Komponenten des Maxwell-Feldes nicht mehr separierbar sind. Siehe als Beispiele [Cab17, Uen54]. Im Vakuum und für Ricci-flache Räume mit $R_{\rho\mu} = 0$ vereinfacht sich die Wellengleichung zu

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu = 0 \qquad . \tag{10.2.10}$$

Dies trifft als Beispiel für die Schwarzschild-Metrik außerhalb der erzeugenden Masse zu.

10.3 Die Eikonal-Näherung

Für viele Problemstellungen reicht es aus, Lösungen der Wellengleichung durch die Eikonal-Näherung zu approximieren. Dies entspricht dem Übergang von der Wellen- zur Strahlenoptik. Bei der Eikonal-Näherung geht man davon aus, dass das Maxwell-Feld lokal als ebene monochromatische Welle approximiert werden kann und das Gravitationsfeld nur sehr kleine Störungen der Amplitude verursacht. Das Maxwell-Feld darf nur sehr weit von seiner Quelle betrachtet werden, um es lokal als ebene Welle approximieren zu können. Zudem muss die Wellenlänge klein (d.h. die Frequenz groß) gegen den Krümmungstensor der Raumzeit sein, um nur kleine Störungen zu erhalten. Diese Annahmen führen zu dem Lösungsansatz

$$A^\mu(x) = \Big(a^\mu(x) + \epsilon b^\mu(x) + \epsilon^2 c^\mu(x) \ldots\Big) e^{iS(x)/\epsilon} \qquad . \tag{10.3.1}$$

bei dem ein Ordnungsparameter ϵ eingeführt wurde, um die Rechnungen übersichtlich zu gestalten. Der Ordnungsparameter steht für die Größenordnung

der einzelnen Terme. Enthält ein Term einen Faktor ϵ^n ist er klein von n-ter Ordnung. Enthält er einen Faktor $1/\epsilon^n$ ist er groß von n-ter Ordnung. In der endgültigen Lösung kann dann einfach $\epsilon = 1$ gesetzt werden, da es sich um einen reinen der Übersichtlichkeit wegen eingeführten Ordnungsparameter handelt. Bei der Eikonal-Näherung werden nur Terme berücksichtigt, die klein von erster Ordnung bezogenen auf den führenden Term sind. Zudem wird wieder ein 4er-Wellenvektor

$$k_\mu = \nabla_\mu S = \partial_\mu S \tag{10.3.2}$$

eingeführt und es werden die skalare Amplitude

$$a = \sqrt{a^\mu a^*_\mu} \qquad , \tag{10.3.3}$$

wobei * wie üblich für die komplexe Konjugation steht, sowie der normierte Polarisationsvektor

$$e_\mu = \frac{a_\mu}{a} \qquad \Longrightarrow \qquad e^\mu e^*_\mu = 1 \tag{10.3.4}$$

definiert. Die Auswertung der Lorentz-Bedingung liefert dann

$$\left(\nabla_\mu\big(a^\mu + \epsilon b^\mu\big) + \big(a^\mu + \epsilon b^\mu\big)\frac{ik_\mu}{\epsilon}\right) e^{iS/\epsilon} = 0 \qquad . \tag{10.3.5}$$

In der führenden Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ folgt

$$a^\mu k_\mu = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad e^\mu k_\mu = 0 \qquad ; \tag{10.3.6}$$

d.h. der Polarisationsvektor ist auch hier orthogonal zum Wellenvektor. Die folgende Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ führt zu

$$\nabla_\mu a^\mu + ik_\mu b^\mu = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k_\mu b^\mu = i\nabla_\mu a^\mu \qquad . \tag{10.3.7}$$

Setzt man den Ansatz (10.3.1) in die Wellengleichung (10.2.9) ein, erhält man (den Faktor $e^{iS/\epsilon}$ bereits gestrichen)

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\nabla^\mu\big(a^\nu + \epsilon b^\nu\big) + \big(a^\nu + \epsilon b^\nu\big)\left(-\frac{k_\mu k^\mu}{\epsilon^2}\right)& \\ + 2\nabla_\mu\big(a^\nu + \epsilon b^\nu\big)\frac{ik^\mu}{\epsilon} + \big(a^\nu + \epsilon b^\nu\big)\frac{i\nabla_\mu k^\mu}{\epsilon}& \\ - g^{\nu\rho}R_{\rho\mu}\big(a^\nu + \epsilon b^\nu\big) = 0 \qquad .&\end{aligned} \tag{10.3.8}$$

In der führenden Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$ folgt

$$k_\mu k^\mu = 0 \qquad . \tag{10.3.9}$$

Dies bedeutet trivialerweise auch

$$\begin{aligned}\nabla_\nu(k_\mu k^\mu) = 2k^\mu \nabla_\nu k_\mu &= 2k^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu S \\ &= 2k^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu S = 2k^\mu \nabla_\mu k_\nu = 0 \qquad .\end{aligned} \tag{10.3.10}$$

Führt man nun einen durch

$$k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \tag{10.3.11}$$

definierten sogenannten affinen Parameter λ ein, dann folgt

$$k^\mu \nabla_\mu k^\nu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\,\partial_\mu k^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho} k^\mu k^\rho = \frac{dk^\nu}{d\lambda} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} k^\mu k^\rho = 0 \qquad . \tag{10.3.12}$$

Die Ergebnisse (10.3.9) und (10.3.12) bedeuten, dass sich das Maxwell-Feld lichtartig entlang einer geodätischen Bahn bewegt. Dies entspricht dem Hauptresultat der geometrischen Optik. Aus der nächsten Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ ergibt sich

$$\epsilon b^\nu \left(-\frac{k_\mu k^\mu}{\epsilon^2}\right) + 2\big(\nabla_\mu a^\nu\big)\frac{ik^\mu}{\epsilon} + a^\nu\,\frac{i\nabla_\mu k^\mu}{\epsilon} = 0 \qquad . \tag{10.3.13}$$

Unter Verwendung von (10.3.9) bedeutet dies

$$2k^\mu \nabla_\mu a^\nu + a^\nu \nabla_\mu k^\mu = 0 \qquad . \tag{10.3.14}$$

Diese Beziehung ausnutzend wird

$$\begin{aligned}2ak^\mu \nabla_\mu a = k^\mu \nabla_\mu a^2 &= k^\mu a^\nu \nabla_\mu a^*_\nu + k^\mu a^*_\nu \nabla_\mu a^\nu \\ = \quad -\frac{1}{2}\,a^\nu a^*_\nu \nabla_\mu k^\mu - \frac{1}{2}\,a^*_\nu a^\nu \nabla_\mu k^\mu \quad &= \quad -a^2 \nabla_\mu k^\mu\end{aligned} \tag{10.3.15}$$

bzw. nach dem Kürzen eines Faktors a

$$k^\mu \nabla_\mu a = -\frac{1}{2}\,a \nabla_\mu k^\mu \qquad . \tag{10.3.16}$$

Die Änderung der Amplitude des Maxwell-Feldes in Richtung des 4er-Wellenvektors ist danach proportional zur negativen Divergenz des Wellenvektors; d.h. korrespondierend zum Auseinanderlaufen des Maxwell-Feldes. Nutzt man

erst (10.3.16) und danach (10.3.14) aus, so erhält man für den Polarisationsvektor

$$\begin{aligned} k^\mu \nabla_\mu e^\nu &= \frac{1}{a}\Big(k^\mu \nabla_\mu (a e^\nu) - k^\mu e^\nu \nabla_\mu a\Big) \\ &= \frac{1}{a}\left(k^\mu \nabla_\mu a^\nu + \frac{1}{2}\, a^\nu \nabla_\mu k^\mu\right) = 0 \qquad . \end{aligned} \tag{10.3.17}$$

Der Polarisationsvektor des Maxwell-Feldes wird entlang der geodätischen Bahnkurve parallel-transportiert.

10.4 Interpretation der Eikonal-Näherung

Mit Hilfe der Quantenfeldtheorie kann man der Eikonal-Näherung eine anschauliche Interpretation geben, da die QFT dem Wellenvektor die Teilchengrößen

$$p^\mu = \hbar k^\mu \qquad \Longrightarrow \qquad E = \hbar\omega \quad \text{sowie} \quad p^i = \hbar k^i \tag{10.4.1}$$

zuordnet. Nach (10.3.9) gilt auch

$$p_\mu p^\mu = \hbar^2 \cdot k_\mu k^\mu = 0 \qquad . \tag{10.4.2}$$

Mit der Umskalierung des affinen Parameters

$$\lambda \quad \longrightarrow \quad \frac{\lambda}{\hbar} \tag{10.4.3}$$

kann man zudem die Gleichung (10.3.12) in die Beziehung

$$\frac{dp^\nu}{d\lambda} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} p^\mu p^\rho = 0 \tag{10.4.4}$$

umformulieren. Insgesamt erlauben es die vorstehenden Zusammenhänge das Maxwell-Feld in der Eikonal-Näherung als einen Strahl masseloser Photonen zu interpretieren, die sich im Gravitationsfeld lichtartig entlang einer geodätischen Bahnkurve bewegen. Dessen Polarisation wird wegen (10.3.17) dabei parallel-transportiert. Weiter kann man aus der Betrachtung von (10.3.15)

$$\nabla_\mu\big(a^2 k^\mu\big) = k^\mu \nabla_\mu a^2 + a^2 \nabla_\mu k^\mu = 0 \tag{10.4.5}$$

ablesen. Bei der Integration über ein 4-dimensionales Raumzeitvolumen V_4 folgt mit dem Divergenz-Theorem

$$0 = \int_{V_4} \nabla_\mu\big(a^2 k^\mu\big) \cdot \sqrt{-g}\, d^4x = \int_{\partial V_4} a^2 k^\mu \cdot n_\mu \sqrt{-\gamma}\, d^3\xi \qquad , \tag{10.4.6}$$

wobei ∂V_4 die 3-dimensionale Oberfläche des Raumzeitvolumens V_4, n_μ den Normalenvektor auf die Oberflächenelemente und $\sqrt{-\gamma}$ die Metrik sowie ξ die Koordinaten im Oberflächenelement bezeichnen.

Wählt man als Raumzeitvolumen eine Lichtröhre die zeitlich bei $t = t_a$ anfängt und bei $t = t_e$ endet, dann sind die beiden zugehörigen Oberflächen 3-dimensionale rein räumliche Volumen Σ_a und Σ_e mit den zugeordneten Normalenvektoren $n_a = (-1, 0, 0, 0)$ und $n_e = (+1, 0, 0, 0)$. Weiter sind die Lichtstrahlen tangential zu den Oberflächenelementen des Mantels M_{ae}, so dass entlang des Mantels $k \perp n$ bzw. $k^\mu n_\mu = 0$ gilt. Das so definierte Raumzeitvolumen zeigt die zeitliche Entwicklung des räumlichen Strahlvolumens von Σ_a bei t_a zu Σ_e bei t_e. Damit ist $\partial V_4 = \Sigma_a \cup M_{ae} \cup \Sigma_e$ und es folgt

$$-\int_{\Sigma_a} a^2 k^0 \sqrt{-\gamma}\, d^3x + \int_{M_{ae}} a^2 k^\mu n_\mu \sqrt{-\gamma}\, d^3\xi + \int_{\Sigma_e} a^2 k^0 \sqrt{-\gamma}\, d^3x = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_{\Sigma_a} a^2 k^0 d\Sigma = \int_{\Sigma_e} a^2 k^0 d\Sigma \quad . \tag{10.4.7}$$

Nun ist der zeitliche Mittelwert der Energiedichte einer elektromagnetischen ebenen Welle ($k^0 = \omega$)

$$\bar{\epsilon}_{em} = \frac{a^2}{2} \cdot \omega^2 = \hbar\omega \cdot \frac{a^2 k^0}{2\hbar} \qquad . \tag{10.4.8}$$

Da die Energie eines einzelnen Photons $E_\gamma = \hbar\omega$ ist, muss $a^2 k^0 / 2\hbar$ die Photonendichte sein. (10.4.7) sagt damit nichts anderes aus, als dass die Photonenzahl bei der Bewegung entlang der Bahn erhalten bleibt. Dies ist plausibel, da die Anzahl der Photonen nicht durch Einflüsse, die sich verglichen mit der Photonfrequenz nur langsam verändern, geändert werden kann. Die Photonen verdünnen sich lediglich entsprechend dem Auseinanderlaufen der Lichtstrahlen.

Kapitel 11

Die gravitative Rotverschiebung

Die gravitative Rotverschiebung war eine der ersten Vorhersagen der ART. In der Literatur wird sie sehr häufig dadurch erklärt, dass die Energie und damit die zugeordnete Frequenz des Photons durch die Arbeit, die das Photon bei seinem Weg aus dem Gravitationsfeld leisten muss, kleiner wird. *Diese Erklärung ist jedoch grundlegend falsch, da die Definition einer potentiellen Energie für ein Photon nicht möglich ist.* Aus diesem Grunde wird nachstehend die gravitative Rotverschiebung aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet.

Dazu wird im Folgenden die Sicht von zwei in einem kugelsymmetrisch statischen Gravitationsfeld ruhenden Beobachtern analysiert.

- Beobachter A befindet sich am Ort r im Gravitationsfeld und seine Größen werden mit dem Index a gekennzeichnet.

- Beobachter B befindet sich außerhalb des Gravitationsfeld und seine Größen werden mit dem Index b gekennzeichnet.

11.1 Eigenzeitbetrachtung

Sendet der Beobachter A einen in seiner Eigenzeit $\Delta\tau_a$ langen Lichtimpuls bestehend aus N Wellenzügen zum Beobachter B und ist die Dauer des Lichtimpulses, die der Beobachter B in seiner Eigenzeit wahrnimmt, $\Delta\tau_b$, so gilt

offenbar

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{N/\Delta\tau_b}{N/\Delta\tau_a} = \frac{\Delta\tau_a}{\Delta\tau_b} \quad . \tag{11.1.1}$$

Bezeichnet in Schwarzschild-Koordinaten $t_{a,b}^{\text{Anfang}}$ den Anfang und $t_{a,b}^{\text{Ende}}$ das Ende des Lichtimpulses, dann muss für die jeweilige Laufzeit

$$t_b^{\text{Anfang}} - t_a^{\text{Anfang}} = t_b^{\text{Ende}} - t_a^{\text{Ende}} \tag{11.1.2}$$

gelten, da das Gravitationsfeld statisch ist und deshalb Laufzeiten von einem Ort zu einem anderen Ort zu unterschiedlichen Zeiten nicht verschieden sein können. Aus (11.1.2) folgt

$$\Delta t_a = t_a^{\text{Ende}} - t_a^{\text{Anfang}} = t_b^{\text{Ende}} - t_b^{\text{Anfang}} = \Delta t_b \quad . \tag{11.1.3}$$

In Schwarzschild-Koordinaten verändert sich die Dauer des Lichtimpulses auf seinem Weg also nicht. Die Gleichheit der Zeitintervalle $\Delta t_a = \Delta t_b$ bedeutet, dass sich die Frequenz des Maxwell-Feldes (bzw. eines Photons) bei Verwendung von Schwarzschild-Koordinaten im Gravitationsfeld nicht ändert. Für einen ruhenden Beobachter ist in Schwarzschild-Koordinaten die Eigenzeit aber entsprechend

$$d\tau = \sqrt{g_{tt}}\, dt = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt \tag{11.1.4}$$

mit der Koordinatenzeit verknüpft. Damit ergibt sich die Rotverschiebung

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{\Delta\tau_a}{\Delta\tau_b} = \frac{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t_a}{\left(1 - \frac{R_s}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t_b} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{11.1.5}$$

11.2 Prozessbetrachtung

Die Rotverschiebung ist auch über den Emissions- und Absorptionsprozess des Photons ableitbar. Ausgangspunkt der Überlegungen ist, dass man einem Teilchen mit Masse im Gravitationsfeld eine nach unten verschobene Ruheenergie in seinem lokalen Minkowski-System zuordnen muss. Ein Teilchen in einem Gravitationsfeld folgt der geodätischen Kurve

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad . \tag{11.2.1}$$

Dies bedeutet, dass ein *zum Betrachtungszeitpunkt noch ruhendes Teilchen* mit sehr kleiner Masse in der Schwarzschild-Metrik zu diesem Zeitpunkt im Eigensystem mit der Eigenlänge $d\ell = \sqrt{-g_{rr}}dr$ und der Eigenzeit $d\tau = \sqrt{g_{tt}}dt$ die gravitative Beschleunigung

$$\begin{aligned} a_g &= \frac{d^2\ell}{d\tau^2} = \sqrt{-g_{rr}}\,\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\sqrt{-g_{rr}}\,\Gamma^r_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \\ &= -\sqrt{-g_{rr}}\left(\frac{g^{rr}}{2}\left(-\partial_r g_{tt}\right)\right) g_{tt}^{-1} \end{aligned} \tag{11.2.2}$$

erfährt. Aus $a_g < 0$ folgt, dass diese zum Gravitationszentrum, d.h. in negativer r-Richtung erfolgt. Unter Beachtung von $d\ell \gtrless 0 \Longrightarrow dE_r \gtrless 0$ führt die Energiebilanz bei einer kleinen radialen Verschiebung im Eigensystem zu

$$dE_r = \vec{F}_g d\vec{\ell} = -m_r a_g d\ell = -E_r a_g d\ell \quad , \tag{11.2.3}$$

wenn man $m_r = E_r$ ausnützt. Hieraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dE_r}{E_r} &= -a_g d\ell = \sqrt{-g_{rr}}\left(\frac{g^{rr}}{2}\left(-\partial_r g_{tt}\right)\right) g_{tt}^{-1}\cdot\sqrt{-g_{rr}}\,dr \\ &= g_{rr}g^{rr}\cdot\frac{\partial_r g_{tt}}{2g_{tt}}\,dr = \frac{\partial_r g_{tt}}{2g_{tt}}\,dr = \frac{dg_{tt}}{2g_{tt}} \\ &= \frac{d\left(1-\frac{R_s}{r}\right)}{2\left(1-\frac{R_s}{r}\right)} \end{aligned} \tag{11.2.4}$$

mit der Lösung

$$E_r = E_\infty\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{11.2.5}$$

Im Grenzfall $r \gg R_s$ entspricht dies mit $E_\infty = m$ der Energie

$$E_r = E_\infty\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq E_\infty\left(1-\frac{R_s}{2r}\right) = E_\infty - \frac{GMm}{r} \tag{11.2.6}$$

eines ruhenden Teilchens in einem klassischen Newton-Potential. Dies zeigt, dass man E_r als Gesamtenergie, d.h. der Summe aus Ruheenergie und potentieller Energie des ruhenden Teilchens interpretieren kann. Emittiert ein Atom A ein Photon, das dann später vom Atom B absorbiert wird, dann verändern sich die inneren Energien und damit die Massen der Atome um die jeweilige Bindungsenergie

$$\text{Emission:} \quad m \longrightarrow m - \omega_a \quad \Longrightarrow \quad \Delta m|_{\text{Em.}} = -\omega_a \tag{11.2.7}$$

$$\text{Absorption:} \quad m \longrightarrow m + \omega_b \quad \Longrightarrow \quad \Delta m|_{\text{Abs.}} = +\omega_b \quad . \tag{11.2.8}$$

Die Energieerhaltung bei dem Gesamtprozess erfordert

$$\Delta E_a + \Delta E_b = \Delta m|_{\text{Em.}} \left(1 - \frac{R_s}{r_a}\right)^{\frac{1}{2}} + \Delta m|_{\text{Abs.}} \left(1 - \frac{R_s}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad , \quad (11.2.9)$$

woraus mit den beiden vorstehenden Beziehungen die Rotverschiebung

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = \left(1 - \frac{R_s}{r_a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (11.2.10)$$

folgt. Ein im Gravitationsfeld durch den Übergang $a \to g$ emittiertes Photon kann deshalb ein Atom weiter außerhalb des Gravitationsfeldes nicht zu dem Übergang $g \to a$ anregen und für einen Beobachter sieht es so aus, als ob das Photon rotverschoben ankommt.

Bei dieser Betrachtung kann der Beobachter B die Rotverschiebung alleine feststellen. Weiß er, dass das Photon durch den Übergang $a \to g$ emittiert wurde, dann wird er

$$\omega_\gamma^{a\to g}\big|_{\text{erwartet}} = \Delta m|_{\text{Em.}} = \omega_a \quad (11.2.11)$$

erwarten. Seine Messungen ergeben aber

$$\omega_\gamma^{a\to g}\big|_{\text{beobachtet}} = \Delta m|_{\text{Abs.}} = \omega_b \quad . \quad (11.2.12)$$

Für ihn bedeutet dies die Rotverschiebung

$$\frac{\omega_\gamma^{a\to g}\big|_{\text{beobachtet}}}{\omega_\gamma^{a\to g}\big|_{\text{erwartet}}} = \frac{\omega_b}{\omega_a} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (11.2.13)$$

die er feststellen kann, ohne sich mit einem Beobachter A austauschen zu müssen. Da sich die Frequenz des Photons in den Schwarzschild-Koordinaten nicht ändert und deshalb mit der außerhalb des Gravitationsfeldes übereinstimmt, muss die Rotverschiebung schon bei der Emission stattfinden.

Hierzu muss man sich verdeutlichen, dass die bisherigen Überlegungen für alle Teilchen mit Masse gelten, also auch für die Elektronen im Atom. Nun sind die Bindungsenergien der Elektronen im Atom proportional zur Masse des Elektrons. Dies bedeutet, dass alle Bindungsenergien im Gravitationsfeld entsprechend (11.2.5) ebenfalls nach unten verschoben sind

$$E_e^{\mathrm{Orbital}}(r) = E_e^{\mathrm{Orbital}}(\infty)\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{11.2.14}$$

Mit diesem Ergebnis ist dann die Frequenz eines Photons, das am Ort r beim Übergang eines Elektrons vom Orbital a in das Orbital g emittiert wird

$$\omega_\gamma^{a\to g}(r) = \Delta E_e^{a\to g}(\infty)\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{11.2.15}$$

Wie zu erwarten, tritt die Rotverschiebung schon bei der Emission des Photons auf.

11.3 Bewegung in der Schwarzschild-Metrik

Für die beiden weiteren Überlegungen sind einige Bewegungsparameter der Photonen im Gravitationsfeld wichtig. Die Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = \left(1-\frac{R_s}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2\,d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,d\phi^2 \tag{11.3.1}$$

beschreibt das statische kugelsymmetrische Gravitationsfeld außerhalb einer ruhenden, nicht rotierenden Masse M. Sie wird vollständig durch den sogenannten Schwarzschild-Radius $R_s = 2GM$ festgelegt. Die Bewegung eines Testteilchen mit der Masse m lässt sich aus dem Wirkungsintegral

$$W = -m\int ds = -m\int\sqrt{g_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{ds}\,\frac{dx^\nu}{ds}}\,ds \tag{11.3.2}$$

ableiten. Die Lagrange-Funktion $L = -m$ ist dabei eine Konstante der Bewegung. Die Auswertung des Wirkungsintegrals kann man deshalb wesentlich vereinfachen, wenn man statt (11.3.2) das äquivalente Wirkungsintegral

$$W_\lambda = -\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\lambda}\,\frac{dx^\nu}{d\lambda}\,d\lambda = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 d\lambda \tag{11.3.3}$$

verwendet und den affinen Parameter durch die Forderung $\frac{dx^\mu}{d\lambda} = p^\mu$ festlegt, da entlang der möglichen Bahnen

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = g_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = m^2 \tag{11.3.4}$$

auch hier eine Konstante der Bewegung ist. Das neue Wirkungsintegral ist so skaliert, dass sich die gleichen kanonisch konjugierten Variablen ergeben. Für ein Teilchen mit Masse ist dabei $d\lambda = ds/m$ zu verwenden. Der Vorteil der Darstellung (11.3.3) mit einem affinen Parameter λ ist, dass diese auch für masselose Teilchen wie Photonen anwendbar ist. Drückt man ds^2 durch die Schwarzschild-Metrik aus, bedeutet dies für die neue Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} 2L_\lambda &= -\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 \qquad\qquad (11.3.5)\\ &= -\left(1-\frac{R_s}{r}\right)(t')^2 + \left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{-1}(r')^2 + r^2\,(\theta')^2 + r^2\sin^2\theta\,(\phi')^2 \quad , \end{aligned}$$

wobei abkürzend die Ableitung nach λ einfach durch ein $'$ dargestellt wurde. Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt dann

$$\left(r^2\theta'\right)' = r^2\sin\theta\,\cos\theta\,(\phi')^2 \tag{11.3.6}$$

$$\left(r^2\sin^2\theta\,\phi'\right)' = 0 \tag{11.3.7}$$

$$\left[\left(1-\frac{R_s}{r}\right)t'\right]' = 0 \quad , \tag{11.3.8}$$

wobei die vierte r-Gleichung nicht berücksichtigt wurde, da es einfacher ist als weitere Gleichung die relativistische Beziehung (11.3.4) auszunutzen. Ist das Teilchen zu Beginn der Bewegung in der r,ϕ-Ebene mit $\theta = \pi/2$ und ist zu diesem Zeitpunkt auch $\theta' = 0$, dann bleibt $\theta' = 0$; d.h. das Teilchen bleibt in dieser Ebene. Die Gleichung (11.3.7) ist dann nichts anderes als die Drehimpulserhaltung in der r,ϕ-Ebene. Relevant für das Folgende ist die dritte Gleichung. Aus ihr folgt, dass die Größe

$$E = \left(1-\frac{R_s}{r}\right)t'(r) \tag{11.3.9}$$

eine Erhaltungsgröße entlang der Teilchenbahn ist. Diese ist wegen

$$r\to\infty \qquad \Longrightarrow \qquad E = t'(\infty) = \left.\frac{dt}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{r=\infty} = p^t_\infty = E_\infty \tag{11.3.10}$$

nichts anderes als die Energie des Teilchens außerhalb des Gravitationsfeldes.

11.4 Energiebetrachtung

Der Beobachter A führt Messungen in seiner lokalen Minkowski-Basis durch. Der Zusammenhang mit der Koordinatenbasis wird durch die Vielbeine e^a_μ vermittelt. Bezeichnet T die Zeitkoordinate in dieser lokalen Minkowski-Basis, dann gilt, da die nicht-diagonalen Vielbeine verschwinden, insbesondere

$$1 - \frac{R_s}{r} = g_{tt} = e^\alpha_t e^\beta_t \eta_{\alpha\beta} = e^T_t e^T_t \eta_{TT} \quad \Longrightarrow \quad e^T_t = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} . \quad (11.4.1)$$

Damit folgt für die Energie im lokalen Minkowski-System

$$\begin{aligned} E_a = p^T_a = e^T_\mu p^\mu_a = e^T_t p^t_a = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} t'(r) \\ = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} E_\infty \quad = \quad \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} E_b \quad . \end{aligned} \quad (11.4.2)$$

Da nach dem starken Äquivalenzprinzip die quantenmechanische Beziehung zwischen Energie und Frequenz eines Photons im lokalen Minkowski-System nicht durch ein Gravitationsfeld beeinflusst wird, ergibt sich

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{E_b}{E_a} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (11.4.3)$$

Treffen sich später die beiden Beobachter und vergleichen ihre Ergebnisse, so sieht es aus, als ob das Photon auf seinem Weg aus dem Gravitationsfeld Energie verloren hätte. Wie bereits gezeigt, wäre dies jedoch eine falsche Interpretation.

11.5 Frequenzbetrachtung

Statt der Energie kann man auch direkt die Frequenz betrachten. In der Speziellen Relativitätstheorie wird eine elektromagnetische Welle durch einen Wellenvektor $k^\alpha = (\omega, \vec{k})$ charakterisiert. Ein ruhender Beobachter besitzt die 4er-Geschwindigkeit $u^\alpha = (1, 0, 0, 0) = u_\alpha$. Die Frequenz kann man deshalb unabhängig von den Koordinaten durch die Beziehung

$$\omega = u_\alpha k^\alpha = u_\alpha p^\alpha \quad (11.5.1)$$

definieren, wobei im letzten Schritt $\hbar = 1$ eingeflossen ist. Diese Beziehung überträgt sich aufgrund des Äquivalenzprinzips direkt in die ART. Für die

4er-Geschwindigkeit $u^\mu = (u^t, 0, 0, 0)$ eines im Gravitationsfeld ruhenden Beobachters folgt

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{tt} \left(u^t\right)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad u^t = (g_{tt})^{-\frac{1}{2}} \qquad . \tag{11.5.2}$$

Unter Ausnutzung von (11.3.9) bedeutet dies für die von ihm festgestellte Frequenz

$$\begin{aligned} \omega = u_\mu p^\mu = u^\nu g_{\nu\mu} p^\mu = (g_{tt})^{-\frac{1}{2}} \, g_{t\mu} p^\mu = (g_{tt})^{-\frac{1}{2}} \, g_{tt} \, p^t \\ = (g_{tt})^{\frac{1}{2}} \, t'(r) \; = \; \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} E_\infty \qquad . \end{aligned} \tag{11.5.3}$$

Vergleichen die beiden Beobachter ihre Ergebnisse, finden sie demzufolge das Verhältnis der Frequenzen

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{\left(1 - \frac{R_s}{\infty}\right)^{-\frac{1}{2}} E_\infty}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} E_\infty} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad , \tag{11.5.4}$$

was natürlich mit der Rotverschiebung (11.4.3) identisch ist.

11.6 Abschließende Bemerkung

Geht man die verschiedenen Ansätze durch, so stellt man fest, dass von der Schwarzschild-Metrik jeweils lediglich der Term g_{tt} in die Lösung eingeht. Dies bedeutet, dass in allen drei Fällen die Rotverschiebung letztlich eine Folge der verschiedenen Eigenzeiten der Beobachter ist.

Kapitel 12

Das Prinzip der maximalen Kraft

Es wird gezeigt, dass sich die Feldgleichungen der ART aus einem Prinzip der maximalen Kraft ableiten lassen.

12.1 Das Prinzip der maximalen Kraft

Die spezielle Relativitätstheorie lässt sich aus dem Prinzip der maximalen Geschwindigkeit $v \leq v_{\max} = c$ ableiten. Entsprechend lässt sich die allgemeine Relativitätstheorie aus dem Prinzip der maximal beobachtbaren Kraft

$$F \leq F_{\max} = \frac{c^4}{4G} \tag{12.1.1}$$

ableiten. Eine ausführliche Diskussion hierzu findet sich in [Sch07, Sch21]. Für zwei ruhende Massen M_1 und M_2 im Abstand D ist nach dem Gravitationsgesetz

$$F = G\,\frac{M_1 M_2}{D^2} = \left[\left(\frac{G}{c^2 D}\right)^2 4 M_1 M_2\right] \cdot \frac{c^4}{4G} \quad .$$

Aus $(M_1 - M_2)^2 \geq 0$ folgt $4M_1M_2 \leq (M_1 + M_2)^2$. Dies bedeutet, da das Gleichheitszeichen nur für $M_1 = M_2 = M$ gilt:

$$\begin{aligned} F &= \left[\left(\frac{G}{c^2 D}\right)^2 4M_1M_2\right] \cdot \frac{c^4}{4G} \\ &\leq \left(\frac{2GM}{c^2 D}\right)^2 \cdot \frac{c^4}{4G} = \left[\left(\frac{2GM}{c^2 D}\right)^2\right] \cdot F_{\max} \end{aligned} \tag{12.1.2}$$

Als Konsequenz von (12.1.1) muss

$$\frac{2GM}{c^2 D} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad D \geq \frac{2GM}{c^2}$$

sein und beim minimalen Abstand

$$R = \frac{2GM}{c^2} \tag{12.1.3}$$

ein Beobachtungshorizont vorliegen, hinter den man nicht schauen kann, da sonst eine größere als die maximal Kraft beobachtbar wäre. Dies heißt auch, dass nichts, was hinter dem Beobachtungshorizont liegt, diesem entweichen kann. Es muss ein schwarzes Loch entstehen. Am Horizont dieses schwarzen Loches tritt dann die maximale Kraft $F_{\max}$ auf.

Die Beschleunigung a an der Oberfläche eines schwarzen Loches wird dann

$$a = \frac{F_{\max}}{m} = \frac{G\,\frac{Mm}{R^2}}{m} = \frac{GM}{R^2} = \frac{c^2}{2R} \quad . \tag{12.1.4}$$

Hiermit kann man leicht überprüfen, dass die Fluchtgeschwindigkeit am Horizont des schwarzen Loches die Lichtgeschwindigkeit ist. Man rechnet

$$\begin{aligned} E_{kin} - E_{pot} &= \frac{1}{2} m v_{Fl}^2 - \frac{GM}{R} m \\ &= \frac{1}{2} m v_{Fl}^2 - aRm \quad \stackrel{!}{=} 0 \quad , \end{aligned}$$

woraus

$$v_{Fl}^2 = 2aR = c^2 \tag{12.1.5}$$

folgt. Damit kann kein Objekt dem schwarzen Loch entweichen. Führt man einem schwarzen Loch die Energie dE zu, so wird

$$\begin{aligned} R = \frac{2GM}{c^2} \quad &\Longrightarrow \quad R + dR = \frac{2G(M + \frac{dE}{c^2})}{c^2} \\ &\Longrightarrow \quad dR = \frac{2G \cdot dE}{c^4} \quad . \end{aligned} \tag{12.1.6}$$

Für die Oberfläche des schwarzen Loches bedeutet dies

$$\begin{aligned} A = 4\pi R^2 \quad &\Longrightarrow \quad A + dA = 4\pi(R + dR)^2 \\ &\Longrightarrow \quad dA = 8\pi R \cdot dR \quad . \end{aligned} \tag{12.1.7}$$

Entsprechend wird

$$\begin{aligned} 2aR = c^2 \quad &\Longrightarrow \quad 2(a + da)(R + dR) = c^2 \\ &\Longrightarrow \quad R \cdot da + a \cdot dR = 0 \end{aligned} \tag{12.1.8}$$

bzw.

$$\frac{da}{a^2} \overset{(12.1.8)}{=} -\frac{dR}{aR} \overset{(12.1.4)}{=} -\frac{4a}{c^4} \cdot R \cdot dR \overset{(12.1.7)}{=} -\frac{a}{2\pi c^4} \cdot dA \quad . \tag{12.1.9}$$

Weiter erhält man

$$dA \overset{(12.1.7)}{=} 8\pi R \cdot dR \overset{(12.1.6)}{=} 8\pi R \cdot \frac{2G \cdot dE}{c^4} \overset{(12.1.4)}{=} \frac{8\pi G}{ac^2} \cdot dE \tag{12.1.10}$$

bzw. durch Umstellung die sogenannte Horizont-Gleichung

$$dE = \frac{c^2}{8\pi G} \cdot a \cdot dA \quad . \tag{12.1.11}$$

Die beiden vorstehenden Beziehungen verknüpfen nur lokale Größen des Horizontes und sind damit unabhängig von dessen globaler Struktur. Die Beziehungen besagen, dass eine eventuell höhere Kraft hinter dem Horizont verborgen sein muss und damit nicht beobachtbar ist. Fällt eine Masse $dm = \frac{dE}{c^2}$ in ein schwarzes Loch, so muss sich der Horizont so nach außen verschieben, dass seine Fläche um dA zunimmt und die zugehörige Oberflächenbeschleunigung um da abnimmt.

12.2 Die Horizont-Gleichung

Wird ein Teilchen in einem Gravitationsfeld kontinuierlich beschleunigt gewinnt es Energie und dadurch erhöht sich die auf das Teilchen wirkende Kraft stetig. Irgendwann muss deshalb auch hier ein Beobachtungshorizont auftreten. Gewinnt das Teilchen im Grenzfall am Beobachtungshorizont die Energie δE, so muss

$$a \cdot m = F_{\max} = (a + da)\left(m + \frac{\delta E}{c^2}\right)$$

sein. Es folgt

$$a \cdot \frac{\delta E}{c^2} + m \cdot da = 0 \quad \Longrightarrow \quad a \cdot \frac{\delta E}{c^2} + \frac{F_{\max}}{a} \cdot da = 0$$
$$\Longrightarrow \qquad \delta E = -\frac{c^6}{4G} \cdot \frac{da}{a^2} \quad . \tag{12.2.12}$$

Ein lokaler Beobachter kann wegen der Gleichheit von träger und schwerer Masse nicht unterscheiden an was für einem Horizont er sich befindet. Dies bedeutet, dass die lokalen geometrischen Eigenschaften mit denen des Horizontes eines schwarzen Loches übereinstimmen müssen. Insbesondere gilt dann lokal (12.1.9) auch hier

$$\frac{da}{a^2} = -\frac{a}{2\pi c^4} \cdot dA \quad .$$

Dies liefert schließlich

$$\delta E = \frac{c^6}{4G} \cdot \frac{a}{2\pi c^4} \cdot dA = \frac{c^2}{8\pi G} \cdot a \cdot dA \quad ; \tag{12.2.13}$$

d.h. es gilt auch in diesem Fall die Horizont-Gleichung.

12.3 Die Raychaudhuri-Identität

Es sei ein Materiefluss mit der Vierer-Geschwindigkeit u_μ gegeben, der sich kräftefrei auf einer geodätischen Kurve bewegt. Dann gilt zwischen

- der Expansion Θ des Volumens
- der Scherung σ der Form ohne Volumenänderung
- der Rotation ω ohne Änderung der Form und
- dem Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$

im Riemann-Raum die Raychaudhuri-Identität [Kar06]. Dies bedeutet für Teilchen mit Masse

$$\frac{d\Theta}{ds} + \frac{1}{3}\Theta^2 + \sigma^2 - \omega^2 = -\frac{1}{c^2} R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \tag{12.3.14}$$

und für Teilchen ohne Ruhemasse mit $k_\mu k^\mu = 0$

$$\frac{d\Theta}{ds} + \frac{1}{2}\Theta^2 + \sigma^2 - \omega^2 = -\frac{1}{c^2} R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \quad . \tag{12.3.15}$$

Im weiteren Verlauf des Textes soll ein Photonenfluss betrachtet werden, der sich natürlich lichtartig bewegt. Für einen rotationsfreien Fluss ($\omega = 0$) kann man in jedem Punkt des Horizontes ein spezielles System auswählen, in dem der Photonenfluss stationär ist; d.h. in dem Θ und σ klein von zweiter Ordnung sind. In diesem speziellen System ist dann

$$\frac{d\Theta}{ds} = -\frac{1}{c^2} R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \quad . \tag{12.3.16}$$

Nun ist für ein infinitesimales Volumenelement V entsprechend Definition

$$\Theta = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{ds} \quad . \tag{12.3.17}$$

Ist dA ein infinitesimales Flächenelement senkrecht zur Flussrichtung eines Volumenelements, das in dem Zeitraum ds hinter dem Horizont verschwindet, dann ist

$$dV = dA \cdot c\, ds \quad . \tag{12.3.18}$$

Dies eingesetzt liefert

$$d\Theta = \frac{dA \cdot c}{V} \quad \Longrightarrow \quad dA = \frac{d\Theta}{c} \cdot V \quad . \tag{12.3.19}$$

Bezeichnet ϵ die Energiedichte des Photonenflusses, dann wird die mit diesem Volumenelement gewonnene Energie

$$\delta E = F \cdot dl = F \cdot c\, ds = ma \cdot c\, ds = \frac{\epsilon\, V}{c^2} \cdot a \cdot c\, ds \quad .$$

Dies alles in die Horizont-Gleichung

$$\delta E = \frac{c^2}{8\pi G} \cdot a \cdot dA \tag{12.3.20}$$

eingesetzt liefert

$$\frac{\epsilon\, V}{c^2} \cdot a \cdot c ds = \frac{c^2}{8\pi G} \cdot a \cdot \frac{d\Theta}{c} \cdot V$$

bzw. nach entsprechender Umformung ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Volumenexpansion und der Energiedichte am Beobachtungshorizont zu

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{8\pi G}{c^2} \cdot \epsilon \quad . \tag{12.3.21}$$

12.4 Die Feldgleichungen

Es war aufgrund der Volumenexpansion am Beobachtungshorizont

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{8\pi G}{c^2} \cdot \epsilon \tag{12.4.22}$$

und aufgrund der Raychaudhuri-Identität

$$\frac{d\Theta}{ds} = -\frac{1}{c^2}\, R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \quad . \tag{12.4.23}$$

Aus diesen beiden Beziehungen folgt

$$8\pi G \cdot \epsilon = -R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \quad . \tag{12.4.24}$$

Setzt man hier die Energiedichte

$$\epsilon = \frac{1}{c^2} \cdot T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \tag{12.4.25}$$

des Photonenflusses ein, so ergibt sich

$$T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = -\frac{c^2}{8\pi G} \cdot R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \quad . \tag{12.4.26}$$

Da die k^μ Nullvektoren sind, muss

$$T_{\mu\nu} = -\frac{c^2}{8\pi G} \cdot \Big(R_{\mu\nu} + f \cdot g_{\mu\nu} \Big)$$

sein. Aus der Divergenzfreiheit des Energie-Impulsdichte-Tensors $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$ und der Divergenzfreiheit der Metrik $D^\mu g_{\mu\nu} = 0$ folgt

$$\begin{aligned} D^\mu R_{\mu\nu} + D^\mu \big(f g_{\mu\nu} \big) &= D^\mu \left(\frac{1}{2}\, R g_{\mu\nu} \right) + g_{\mu\nu}\, \partial^\mu f \\ &= g_{\mu\nu}\, \partial^\mu \left(\frac{1}{2}\, R + f \right) \quad = \quad 0 \quad . \end{aligned}$$

Dies liefert $\frac{1}{2}R + f = \Lambda$ mit konstantem Λ und führt zu der Einstein-Gleichung

$$T_{\mu\nu} = -\frac{c^2}{8\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \quad . \tag{12.4.27}$$

Diese ist invariant unter beliebigen Koordinatentransformationen und gilt deshalb nicht nur in dem speziellen System, in dem die Volumenexpansion und die Scherung stationär sind, sondern in allen Systemen. Da die Beschleunigung lokal immer weg transformiert werden kann, muss (12.4.27) zudem überall im Raume gelten. Ein interessanter Aspekt ist, dass sich die vorstehende Ableitung auch thermodynamisch interpretieren lässt. Siehe hierzu [Jac95].

Kapitel 13

Die Quantisierung des Raumes

Die Quantisierung mit den Ashtekar-Variablen wird skizziert.

13.1 Wdh.: SU(N)-Gruppe

Hinweis zur Notation: Über gleiche interne Indizes wird stets summiert. Dabei ist es allerdings ohne Bedeutung, ob eine Index oben oder unten steht. Die Position wird jeweils zweckmäßig gewählt.

Die SU(N) wird durch unitären Transformationen

$$U(\alpha) = e^{-i\alpha_n T_n} \tag{13.1.1}$$

mit N reellen Parametern α_n dargestellt. Für die N Generator-Matrizen T_n gelten die Beziehungen

$$T_n^\dagger = T_n \tag{13.1.2}$$

$$\text{Spur}\big[\, T_n \,\big] = 0 \tag{13.1.3}$$

$$\text{Spur}\big[\, T_n \cdot T_m \,\big] = \frac{1}{2}\,\delta_{nm} \tag{13.1.4}$$

$$[\, T_n, T_m \,] = i f_{nmr} T_r \qquad . \tag{13.1.5}$$

Die vollständig antisymmetrischen Größen f_{nmr} werden als Strukturkonstanten der Symmetrietransformation (13.1.1) bezeichnet und es gilt

$$f_{nrj}f_{rm\ell} + f_{rmj}f_{n\ell r} + f_{\ell rj}f_{nmr} \quad = \quad 0 \qquad . \tag{13.1.6}$$

Vektoren $\Phi = (\phi_n)$ der fundamentalen Darstellung besitzen N Komponenten und transformieren sich entsprechend

$$\Phi' = U\Phi \qquad . \tag{13.1.7}$$

Beispiele für die fundamentale Darstellungen sind:

$$SU(2): \quad T_n = \frac{1}{2}\,\sigma_n \qquad \sigma_n : \text{Pauli-Matrizen} \tag{13.1.8}$$

$$SU(3): \quad T_n = \frac{1}{2}\,\lambda_n \qquad \lambda_n : \text{Gell-Mann-Matrizen} \tag{13.1.9}$$

Die adjungierte Darstellung wird durch die N Generator-Matrizen

$$(T_n^{\text{ad}})_{jk} = -if_{njk} \tag{13.1.10}$$

der Dimension $N^2 - 1$ gebildet. Vektoren $X = (X_n)$ der adjungierten Darstellung transformieren sich entsprechend

$$X' = U^{\text{ad}}X = e^{-i\alpha_n T_n^{\text{ad}}}X \qquad . \tag{13.1.11}$$

Diese Transformation kann man durch Einführung der $N \times N$-Matrix

$$\mathbf{X} = T_n X_n \tag{13.1.12}$$

auch in Matrixform

$$\mathbf{X}' = U\mathbf{X}U^\dagger \tag{13.1.13}$$

schreiben; d.h. man kann ausschließlich mit den Matrizen der fundamentalen Darstellung arbeiten. Durch Übergang zu infinitesimalen Transformationen kann man verifizieren

$$\begin{aligned} T_j X_j' &= \big(1 - i\alpha_n T_n\big)\, T_j X_j \,\big(1 + i\alpha_n T_n\big) \\ &= T_j X_j - i\alpha_n \big[T_n, T_j\big] X_j \\ &= T_j X_j - i\alpha_n \,(if_{njk})\, T_k X_j \\ &= T_j \big(\, X_j - i\alpha_n(-if_{njk})X_k \,\big) \qquad , \end{aligned} \tag{13.1.14}$$

da dies der infinitesimalen Form von (13.1.11) entspricht.

13.2 Wdh.: Yang-Mills Theorie

Hinweis zur Notation: Für die Metrik wird in diesem Abschnitt die Signatur (+1,-1,-1,-1) der Teilchenphysiker verwendet.

Die Konfigurationsvariablen einer wechselwirkenden Yang-Mills Theorie sind die Felder $\Phi(x)$ der Materie und die die Wechselwirkung vermittelnden Eichfelder $A_n(x)$. Führt man auch hier eine Matrix

$$\mathbf{A}(x) = T_n A_n(x) \tag{13.2.1}$$

der Eichfelder ein, dann ist die zugehörige Lagrange-Dichte

$$L = L_M\big(\Phi, D_\mu\Phi\big) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\big[\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu}\big] \tag{13.2.2}$$

mit dem Feldstärketensor

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + i\big[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu\big] \tag{13.2.3}$$

invariant unter den kombinierten lokalen Eichtransformationen

$$\Phi'(x) = U(x)\Phi(x) \tag{13.2.4}$$

$$\mathbf{A}'_\mu(x) = U(x)\mathbf{A}_\mu(x)U^\dagger(x) + i\big(\partial_\mu U(x)\big)U^\dagger(x) \tag{13.2.5}$$

mit der ortsabhängigen Transformation

$$U(x) = e^{-i\alpha_n(x)T_n} \qquad . \tag{13.2.6}$$

Während das Materiefeld und der Feldstärketensor kovariant transformieren, trifft dies auf das Eichfeld bei lokalen Eichtransformationen nicht zu. Das Eichfeld tritt in den kovarianten Ableitungen der

$$\text{fundamentalen Darstellung} \qquad D_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi + iT_n A^n_\mu\Phi \tag{13.2.7}$$

$$\text{und adjungierten Darstellung} \qquad \mathcal{D}_\mu X = \partial_\mu X + iT^{\mathrm{ad}}_n A^n_\mu X \tag{13.2.8}$$

auf und transformiert sich deshalb wie ein affiner Zusammenhang. In Matrixform lauten die beiden kovarianten Ableitungen

$$D_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi + i\mathbf{A}_\mu\Phi \tag{13.2.9}$$

$$\mathcal{D}_\mu\mathbf{X} = \partial_\mu\mathbf{X} + i\big[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{X}\big] \qquad . \tag{13.2.10}$$

Während die Identität der beiden Darstellungen der kovarianten Ableitung für die fundamentale Darstellung offensichtlich ist, kann man die Identität für die

adjungierte Darstellung durch Betrachtung der einzelnen Komponenten sehen. Unter Ausnutzung von (13.1.10) ist nämlich

$$\mathcal{D}_\mu X_j = \partial_\mu X_j - i^2 f_{njk} A^n_\mu X_k = \partial_\mu X_j - f_{jnk} A^n_\mu X_k \quad . \tag{13.2.11}$$

Dasselbe Ergebnis ergibt sich aus (13.2.10), wenn man (13.1.5) verwendet:

$$\begin{aligned} T_j X_j &= T_j \partial_\mu X_j + i\big[T_n A^n_\mu, T_k X_k\big] \\ &= T_j \partial_\mu X_j + i\big[T_n, T_k\big] A^n_\mu X_k \\ &= T_j \partial_\mu X_j + i^2 f_{nkj} T_j A^n_\mu X_k \\ &= T_j \Big(\partial_\mu X_j - f_{jnk} A^n_\mu X_k\Big) \end{aligned} \tag{13.2.12}$$

Nach dem gleichen Schema wie vorstehend folgt für die Komponenten des Feldstärketensors

$$G^n_{\mu\nu} = \partial_\mu A^n_\nu - \partial_\nu A^n_\mu - f_{njk} A^j_\mu A^k_\nu \quad . \tag{13.2.13}$$

Nun wird für eine infinitesimale Transformation des Eichfeldes

$$\begin{aligned} T_m A'^m_\mu &= \Big(1 - i\alpha_k T_k\Big)\Big(T_m A^m_\mu\Big)\Big(1 + i\alpha_k T_k\Big) \\ &\qquad + i\Big(1 - i\alpha_k T_k\Big)\Big(-i(\partial_\mu \alpha_m) T_m\Big)\Big(1 + i\alpha_k T_k\Big) \\ &= T_m A^m_\mu - i\Big[T_k, T_m\Big]\alpha_k A^m_\mu + (\partial_\mu \alpha_m) T_m \\ &= T_m A^m_\mu - i^2 f_{kmn} T_n \alpha_k A^m_\mu + (\partial_\mu \alpha_m) T_m \\ &= T_m A^m_\mu + f_{knm} T_m \alpha_k A^n_\mu + (\partial_\mu \alpha_m) T_m \end{aligned} \tag{13.2.14}$$

bzw. nach dem Kürzen von T_m

$$\delta A^m_\mu = \partial_\mu \alpha_m + f_{mkn} \alpha_k A^n_\mu \quad . \tag{13.2.15}$$

Dies wiederum hat für die Komponenten des Feldstärketensors das kovariante Verhalten

$$\delta G^n_{\mu\nu} = f_{njk} \alpha_j G^k_{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{G}'_{\mu\nu} = U \mathbf{G}_{\mu\nu} U^\dagger \tag{13.2.16}$$

zur Folge.

13.3 Änderung der Signatur der Metrik

Notation: An dieser Stelle erfolgt der Übergang zur Signatur $(-1,+1,+1,+1)$ *der Metrik bei den Relativisten.*

Diese Änderung hat zur Folge, dass in den Beziehungen des vorherigen Abschnitts Felder mit unten stehenden Lorentz-Indizes sowie Ableitungen nach der Koordinatenbasis mit oben stehenden Lorentz-Indizes jeweils mit einem Faktor (-1) zu versehen sind.

Für die im Folgenden wichtigen Beziehungen bedeutet dies:

$$(13.2.9) \implies D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - i\mathbf{A}_\mu \Phi \tag{13.3.1}$$

$$(13.2.11) \implies \mathcal{D}_\mu X_j = \partial_\mu X_j + f_{jnk} A^n_\mu X_k \tag{13.3.2}$$

$$(13.2.13) \implies G^n_{\mu\nu} = -\big(\partial_\mu A^n_\nu - \partial_\nu A^n_\mu\big) - f_{njk} A^j_\mu A^k_\nu \tag{13.3.3}$$

$$(13.2.15) \implies \delta A^m_\mu = -\partial_\mu \alpha_m + f_{mkn} \alpha_k A^n_\mu \tag{13.3.4}$$

$$(13.2.16) \implies \delta G^n_{\mu\nu} = f_{njk} \alpha_j G^k_{\mu\nu} \tag{13.3.5}$$

Anmerkung: In der jetzt gültigen Signatur wird in der Literatur meistens einfach der Feldstärketensor entsprechend $G^n_{\mu\nu}\big|_{\text{neu}} = -\,G^n_{\mu\nu}\big|_{\text{alt}}$ umdefiniert.

13.4 Hamilton-Form des Eichfeldes

Hinweis zur Notation: Indizes des räumlichen Teils der Koordinatenbasis werden mit $a, b, c \ldots$ *bezeichnet.*

Es wird nun ausschließlich das freie Eichfeld betrachtet. Die Konfigurationsvariablen der Lagrange-Dichte

$$L = -\frac{1}{2}\,\text{Spur}\big[\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu}\big] = -\frac{1}{4}\,G^n_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_n \tag{13.4.1}$$

sind die Komponenten des Potentialfeldes A^n_μ. Die kanonisch konjugierten Felder sind

$$\begin{aligned}\pi^\mu &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A^n_\mu)} = -\frac{1}{4}\,\frac{\partial(G^n_{\rho\nu} G^{\rho\nu}_n)}{\partial(\partial_0 A^n_\mu)} \\ &= -\frac{1}{2}\,G^{\rho\nu}_n \frac{\partial(G^n_{\rho\nu})}{\partial(\partial_0 A^n_\mu)} \quad = \quad -G^{\mu 0}_n \qquad .\end{aligned} \tag{13.4.2}$$

Aus der Antisymmetrie des Feldstärketensors folgt sofort die primäre Nebenbedingung

$$\mathcal{P}: \qquad \pi_n^0 = -G_n^{00} = 0 \qquad . \tag{13.4.3}$$

Der räumliche Teil des Feldstärketensors wird als elektrische Feldstärke

$$E_n^a = -G_n^{a0} = \partial^a A_n^0 - \partial^0 A_n^a + f_{njk} A_j^a A_k^0 \tag{13.4.4}$$

bezeichnet, da er im Fall des U(1)-Eichfelds ($f_{njk} = 0$) dem elektrischen Feld der Maxwell-Gleichungen entspricht. Die kanonisch konjugierten Variablen der Eichtheorie werden durch das Paar (A_a^n, E_n^a) gebildet. Legendre-Transformation des Lagrange-Skalars liefert den Hamilton-Skalar

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= E_n^a \cdot \partial_0 A_a^n + \frac{1}{4}\, G_{\mu\nu}^n G_n^{\mu\nu} \\ &= E_n^a \cdot \partial_0 A_a^n + \frac{1}{4}\, G_{ab}^n G_n^{ab} + \frac{1}{2}\, E_a^n E_n^a \qquad . \end{aligned} \tag{13.4.5}$$

Diese Darstellung macht deutlich, dass nur der erste Term eine zeitliche Ableitung der kanonischen Variablen enthält. Für diese gilt

$$\partial_0 A_a^n = \partial_a A_0^n - E_a^n + f_{njk} A_a^j A_0^k \qquad . \tag{13.4.6}$$

Damit wird das Hamilton-Funktional in der kanonischen Form

$$\begin{aligned} H &= \int \left(E_n^a \big(\partial_a A_0^n - E_a^n + f_{njk} A_a^j A_0^k\big) + \frac{1}{4}\, G_{ab}^n G_n^{ab} + \frac{1}{2}\, E_a^n E_n^a \right) d^3x \\ &= \int \left(\big(-(\partial_a E_n^a) A_0^n + f_{njk} A_a^j E_n^a A_0^k\big) + \frac{1}{4}\, G_{ab}^n G_n^{ab} - \frac{1}{2}\, E_a^n E_n^a \right) d^3x \\ &= \int \left(-\big(\partial_a E_k^a + f_{kjn} A_a^j E_n^a\big) A_0^k + \frac{1}{4}\, G_{ab}^n G_n^{ab} - \frac{1}{2}\, E_a^n E_n^a \right) d^3x \\ &= \int \left(-A_0^k\, \mathcal{D}_a E_k^a + \frac{1}{4}\, G_{ab}^n G_n^{ab} - \frac{1}{2}\, E_a^n E_n^a \right) d^3x \qquad , \end{aligned} \tag{13.4.7}$$

wobei einmal partiell integriert wurde. Dann folgt, da A_0^k nur in dem ersten Term auftritt, aus der Forderung

$$\dot{\pi}_n^0(y) = \big\{\pi_n^0(y), H\big\} + \int \big\{\pi_n^0(y), \pi_k^0(x)\big\} \lambda_k(x) d^3x \overset{!}{\approx} 0 \tag{13.4.8}$$

als sekundäre Nebenbedingung die Gauß-Bedingung

$$\mathcal{S}: \qquad \mathcal{D}_a E_k^a \approx 0 \qquad . \tag{13.4.9}$$

13.5 Wdh.: Die Ashtekar-Variablen

Durch den Übergang zum Vielbein-Formalismus der ART ergeben sich nach mehreren kanonischen Transformationen als kanonisch konjugiertes Paar die Ashtekar-Variablen

$$\mathrm{A}_a^i = -\frac{1}{2}\,\epsilon^{ijk}\omega_{ajk} + \beta K_a^i \tag{13.5.1}$$

$$\mathrm{E}_i^a = \; 2ee_i^a/\beta \tag{13.5.2}$$

mit dem Immirzi-Parameter β. Aus dem Hamilton-Formalismus folgt unter anderem als eine Nebenbedingung die Gauß-Bedingung

$$\mathcal{D}_a \mathrm{E}_k^a = 0 \tag{13.5.3}$$

mit der kovarianten Ableitung

$$\mathcal{D}_a X_k = \partial_a X_k + f_{kjn} A_a^j X_n \qquad . \tag{13.5.4}$$

Weiter gilt bei einer mit α parametrisierten Eichtransformation:

$$\delta \mathrm{A}_a^i = -\partial_a \alpha^i + \epsilon_{ikl}\alpha^k \mathrm{A}_a^l \tag{13.5.5}$$

$$\delta \mathrm{E}_i^a = \epsilon_{ikm}\alpha^k \mathrm{E}_m^a \tag{13.5.6}$$

Diese Beziehungen stimmen für $f_{ijk} = \epsilon_{ijk}$ mit denen einer SU(2)-Yang-Mills Theorie überein:

(13.5.3)	entspricht	(13.4.9)
(13.5.4)	entspricht	(13.3.2)
(13.5.5)	entspricht	(13.3.4)
(13.5.6)	entspricht	(13.3.5)

Dies erlaubt es, die Hamilton-Form der ART im Rahmen einer SU(2)-Yang-Mills Theorie zu interpretieren. Insbesondere kann man die für Yang-Mills Theorien entwickelten Methoden auf die ART in der Ashtekar-Formulierung übertragen.

So erlaubt die Interpretation im Rahmen einer SU(2)-Theorie die Einführung des Parallel-Propagators

$$\mathcal{H}(\gamma) = \mathrm{P}\exp\left(\frac{i}{2}\,\sigma_i \int_\gamma \mathrm{A}_a^i\, dx^a\right) \tag{13.5.7}$$

entlang einer Kurve $x^a = \gamma^a(s)$ sowie des Flusses

$$\mathrm{E}_i(S) = \int_S \mathrm{E}_i^a \, n_a dS \qquad \text{mit} \quad \vec{n} \perp dS \quad \text{und} \quad |\vec{n}| = 1 \tag{13.5.8}$$

durch eine Fläche S. Durchstößt die Kurve $\gamma(s)$ die Fläche S in $\vec{n}$-Orientierung genau einmal, dann folgt die Poisson-Klammer

$$\Big\{\mathrm{E}_i(S), \mathcal{H}(\gamma)\Big\} = \mathcal{H}(\gamma_3) \, \left(-\frac{i}{2}\,\sigma_i\right) \, \mathcal{H}(\gamma_1) \qquad , \tag{13.5.9}$$

wobei γ_1 bis zum Schnittpunkt führt und γ_3 vom Schnittpunkt weg führt. Bei gegenläufiger Orientierung von $\gamma(s)$ und $\vec{n}$ erscheint ein negatives Vorzeichen und wenn mehrere Schnittpunkte vorliegen ist über diese zu summieren.

Bei einer geschlossenen Kurve $x^a = \gamma^a(s)$ spricht man von einer Holonomie. Bildet man die Spur einer Holonomie

$$T(\gamma) = \mathrm{Spur}\big[H(\gamma)\big] \qquad , \tag{13.5.10}$$

erhält man eine Wilson-Loop. Das Besondere an den Wilson-Loops ist, dass sie eichinvariante Funktionen sind. Wählt man sie als Basisfunktionen zur Darstellung von Wellenfunktionen, so ist die Wellenfunktionen automatisch eichinvariant.

13.6 Der Flächenoperator

Die Quantisierung der Ashtekar-Variablen erfolgt wie üblich durch den Übergang von den Konfigurationsvariablen zu Operatoren

$$\mathrm{A}_a^i \quad \longrightarrow \quad \hat{\mathrm{A}}_a^i \, \Psi[A] = \mathrm{A}_a^i \, \Psi[A] \tag{13.6.1}$$

$$\mathrm{E}_i^a \quad \longrightarrow \quad \hat{\mathrm{E}}_i^a \, \Psi[A] = -i \, \frac{\delta \Psi[A]}{\delta \mathrm{A}_a^i} \tag{13.6.2}$$

sowie von Poisson-Klammern zu Kommutatoren:

$$\begin{aligned} \Big\{\mathrm{A}_a^i(\vec{y},t), \mathrm{E}_j^b(\vec{x},t)\Big\} &= \delta_a^b \delta_j^i \, \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ &\downarrow \\ \Big[\hat{\mathrm{A}}_a^i(\vec{y},t), \hat{\mathrm{E}}_j^b(\vec{x},t)\Big] &= i\delta_a^b \delta_j^i \, \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \end{aligned} \tag{13.6.3}$$

Mit diesen Festlegungen gilt

$$\hat{\mathrm{E}}_i^a \, \Psi[A] = i \left\{ \mathrm{E}_i^a \, , \, \Psi[A] \right\} \qquad . \tag{13.6.4}$$

Unter der Bedingung, dass die Kurve $\gamma(s)$ die Fläche S nur einmal durchstößt, bedeutet dies mit $\gamma = \gamma_3 \circ \delta\gamma \circ \gamma_1$ bei infinitesimalen $\delta\gamma$ für die verschmierten Schleifenvariablen je nach Orientierung der Kurve zur Fläche

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{E}}_i(S)\hat{\mathrm{E}}_i(S)\mathcal{H}(\gamma) &= i \left\{ \mathrm{E}_i(S), i \left\{ \mathrm{E}_i(S), \mathcal{H}(\gamma) \right\} \right\} \\ &= -\mathcal{H}(\gamma_3) \left\{ \mathrm{E}_i(S), \mathcal{H}(\delta\gamma) \right\} \left(\mp \frac{i}{2} \sigma_i \right) \mathcal{H}(\gamma_1) \\ &= -\mathcal{H}(\gamma_3) \left(\mp \frac{i}{2} \sigma_i \right) \left(\mp \frac{i}{2} \sigma_i \right) \mathcal{H}(\gamma_1) \qquad . \end{aligned} \tag{13.6.5}$$

Nun gilt für die Pauli-Matrizen

$$\sigma_i \sigma_i = 3 \cdot 1_{2\times 2} \qquad , \tag{13.6.6}$$

so dass sich schließlich

$$\hat{\mathrm{E}}_i(S)\hat{\mathrm{E}}_i(S)\mathcal{H}(\gamma) = \frac{3}{4} \mathcal{H}(\gamma_3)\mathcal{H}(\gamma_1) = \frac{3}{4} \mathcal{H}(\gamma) \tag{13.6.7}$$

ergibt. Angewendet auf eine Wilson-Loop folgt

$$\hat{\mathrm{E}}_i(S)\hat{\mathrm{E}}_i(S)\mathcal{T}(\gamma) = \frac{3}{4} \mathcal{T}(\gamma) \qquad . \tag{13.6.8}$$

Wilson-Loops, die genau einmal die Fläche S durchstoßen sind also Eigenfunktionen des Operators $\hat{\mathrm{E}}^2(S)$ mit dem diskreten Wert $3/4$. Dies ist auch der kleinste nicht verschwindende Eigenwert. Um den allgemeinen Fall zu erfassen, ist es zweckmäßig, die Fläche in eine Vielzahl von Teilflächen S_n so zu zerlegen, dass $S = \cup S_n$ gilt. Damit kann man den Operator

$$\hat{F}(S) = \frac{\beta}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_n \sqrt{\hat{\mathrm{E}}_i(S_n)\hat{\mathrm{E}}_i(S_n)} \tag{13.6.9}$$

definieren. Angewendet auf eine Wilson-Loop ergeben sich diskrete Eigenwerte

$$\hat{F}(S)\mathcal{T}(\gamma) = f(\gamma, S)\, \mathcal{T}(\gamma) \qquad , \tag{13.6.10}$$

die davon abhängen wie oft die Kurve γ die Fläche S durchstößt. Zur physikalischen Interpretation der Eigenwerte ist die klassische Form des Operators (13.6.9) abzuleiten.

Für eine genügend feine Partitionierung der Fläche wird klassisch

$$\begin{aligned} F(S) &= \frac{\beta}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_n \sqrt{\mathrm{E}_i(S_n)\mathrm{E}_i(S_n)} \\ &= \frac{\beta}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_n \sqrt{\left(\int_{S_n} \mathrm{E}_i^a \, n_a dS_n\right)\left(\int_{S_n} \mathrm{E}_i^b \, n_b dS_n\right)} \\ &= \frac{\beta}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_n \sqrt{\left(\mathrm{E}_i^a \, n_a \Delta S_n\right)\left(\mathrm{E}_i^b \, n_b \Delta S_n\right)} \\ &= \frac{\beta}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_n \sqrt{\mathrm{E}_i^a \, n_a \mathrm{E}_i^b \, n_b}\, \Delta S_n \qquad . \end{aligned} \tag{13.6.11}$$

Nun ist

$$\mathrm{E}_i^a \, n_a \mathrm{E}_i^b \, n_b = \frac{2ee_i^a}{\beta} \, n_a \cdot \frac{2ee_i^b}{\beta} \, n_b = \left(\frac{2}{\beta}\right)^2 h h^{ab} n_a n_b \qquad , \tag{13.6.12}$$

so dass man schließlich

$$\begin{aligned} F(S) &= \lim_{n\to\infty} \sum_n \sqrt{h h^{ab} n_a n_b}\ \Delta S_n \\ &= \int_S \sqrt{h h^{ab} n_a n_b}\, dS \end{aligned} \tag{13.6.13}$$

erhält. Das Integral ist aber nichts anderes als der Flächeninhalt von S. Dies bedeutet, dass die Eigenwerte des Operators $\hat{F}(S)$ für die möglichen Flächeninhalte stehen. Dieser kann somit nur diskrete Werte annehmen. Berücksichtigt man nun noch den bei der Definition von E_i^a unterdrückten Faktor $16\pi G$, ergibt sich als kleinster nicht verschwindender Eigenwert

$$f_{\min} = 16\pi G \cdot \frac{\beta}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = 4\sqrt{3}\,\pi\beta\,\ell^2_{\mathrm{Planck}} \tag{13.6.14}$$

mit der Plancklänge

$$\ell_{\mathrm{Planck}} = \sqrt{G} \approx \sqrt{6.709 \cdot 10^{-39}/\mathrm{GeV}^2} \approx 1.6 \cdot 10^{-33}\,\mathrm{cm} \qquad . \tag{13.6.15}$$

Der kleinste mögliche Flächeninhalt liegt damit in der Größenordnung von $10^{-66}\,\mathrm{cm}^2$. Die Gesamtheit der Wilson-Loops bildet nun allerdings eine übervollständige Basis. Um das vollständige Spektrum des Flächenoperators zu bestimmen, ist es deshalb notwendig auf Spin-Netzwerke überzugehen, die eine orthogonale Basis liefern. Die Tatsache, dass Flächeninhalte quantisiert sind, deutet auf eine diskrete Struktur des Raumes hin.

13.7 Einschub: Der klassische Tetraeder

Ein allgemeiner Tetraeder ist ein Körper, der von vier Dreiecksflächen begrenzt wird. Führt man zu jeder Dreiecksfläche $\alpha \in \{a, b, c, d\}$ einen nach außen gerichteten Normalenvektor $\vec{L}_\alpha$ ein, dessen Betrag dem Flächeninhalt entspricht

$$F_\alpha = \left|\vec{L}_\alpha\right| = \sqrt{L^i_\alpha L^i_\alpha} \qquad , \tag{13.7.1}$$

dann ergibt sich das Volumen des Tetraeders aus der Beziehung

$$V^2 = \frac{2}{9}\left|\left(\vec{L}_\alpha \times \vec{L}_\beta\right) \cdot \vec{L}_\gamma\right| \qquad . \tag{13.7.2}$$

Da der Tetraeder ein geschlossener Körper ist, erfüllen die Normalenvektoren die Bedingung

$$\vec{L}_a + \vec{L}_b + \vec{L}_c + \vec{L}_d = 0 \qquad . \tag{13.7.3}$$

Diese Bedingung stellt sicher, dass man drei beliebige von den vier Normalenvektoren des Tetraeders zur Volumenberechnung verwenden darf. Unter Ausnutzung dieser Bedingung folgt als Beispiel

$$\begin{aligned} V^2 &= \frac{2}{9}\left|\left(\vec{L}_\alpha \times \vec{L}_\beta\right) \cdot \left(-\vec{L}_\alpha - \vec{L}_\beta - \vec{L}_\delta\right)\right| \\ &= \frac{2}{9}\left|\left(\vec{L}_\alpha \times \vec{L}_\beta\right) \cdot \vec{L}_\alpha + \left(\vec{L}_\alpha \times \vec{L}_\beta\right) \cdot \vec{L}_\beta + \left(\vec{L}_\alpha \times \vec{L}_\beta\right) \cdot \vec{L}_\delta\right| \\ &= \frac{2}{9}\left|\left(\vec{L}_\alpha \times \vec{L}_\beta\right) \cdot \vec{L}_\delta\right| \qquad . \end{aligned} \tag{13.7.4}$$

Mit passend gewählter Orientierung kann man deshalb ohne Einschränkung der Allgemeinheit für das Volumen die Darstellung

$$V^2 = \frac{2}{9}\,\epsilon_{ijk} L^i_a L^j_b L^k_c \tag{13.7.5}$$

wählen. Die beiden Beziehungen (13.7.3) sowie (13.7.5) sind natürlich unabhängig von der Lage des Tetraeders im Raum; d.h. invariant bei beliebigen Drehungen im Raum.

13.8 Der Volumenoperator

Da aber jedes abgeschlossene Volumen durch äußere Flächen begrenzt wird, muss es ein kleinstes mögliches Volumen geben. Dies kann nur dem Volumen

eines Tetraeders entsprechen, dessen vier Flächen den minimalen Wert nach (13.6.14) annehmen. Vergleicht man den Flächenoperator, dessen Fläche S_n genau einmal durchstoßen wird,

$$\hat{F}(S_n) = \frac{\beta}{2}\sqrt{\hat{\mathrm{E}}_i(S_n)\hat{\mathrm{E}}_i(S_n)} \tag{13.8.1}$$

mit der Beziehung (13.7.1), legt dies eine Quantisierung durch den Übergang

$$L^i_\alpha \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\beta}{2}\,\hat{\mathrm{E}}_i(S_\alpha) \tag{13.8.2}$$

nahe. Damit wird der Volumenoperator

$$\hat{V}^2 = \frac{2}{9}\left(\frac{\beta}{2}\right)^3 \epsilon_{ijk}\hat{\mathrm{E}}_i(S_a)\hat{\mathrm{E}}_j(S_b)\hat{\mathrm{E}}_k(S_c) \qquad . \tag{13.8.3}$$

Nun liefert die zweifache Anwendung des Feldstärke-Operators

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{E}}_i(S_\alpha)\hat{\mathrm{E}}_j(S_\alpha)\mathcal{H}(\gamma) &= i\left\{\mathrm{E}_i(S_\alpha), i\left\{\mathrm{E}_j(\alpha), \mathcal{H}(\gamma)\right\}\right\} \\ &= \mathcal{H}(\gamma_3)\, i\left\{\mathrm{E}_i(S_\alpha), \mathcal{H}(\delta\gamma)\right\}\left(\frac{\sigma_j}{2}\right)\mathcal{H}(\gamma_1) \\ &= \mathcal{H}(\gamma_3)\left(\frac{\sigma_i}{2}\right)\left(\frac{\sigma_j}{2}\right)\mathcal{H}(\gamma_1) \quad .\end{aligned} \tag{13.8.4}$$

Dies bedeutet

$$\begin{aligned}\left[\hat{\mathrm{E}}_i(S_\alpha), \hat{\mathrm{E}}_j(S_\alpha)\right]\mathcal{H}(\gamma) &= \mathcal{H}(\gamma_3)\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right]\mathcal{H}(\gamma_1) \\ &= \mathcal{H}(\gamma_3)\left(i\epsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}\right)\mathcal{H}(\gamma_1) \\ &= i\epsilon_{ijk}\hat{\mathrm{E}}_k(S_\alpha)\mathcal{H}(\gamma) \qquad ,\end{aligned} \tag{13.8.5}$$

d.h. für den Feldstärke-Operator gelten die Vertauschungsrelationen

$$\left[\hat{\mathrm{E}}_i(S_\alpha), \hat{\mathrm{E}}_j(S_\alpha)\right] = i\epsilon_{ijk}\hat{\mathrm{E}}_k(S_\alpha) \qquad . \tag{13.8.6}$$

In der Eigenbasis kann man deshalb den Feldstärke-Operator durch die Pauli-Matrizen repräsentieren

$$\hat{\mathrm{E}}_i(S_\alpha) = \left.\frac{\sigma_i}{2}\right|_\alpha \qquad . \tag{13.8.7}$$

Die Feldstärke-Operatoren wirken nun auf Holonomien für SU(2)-Spinoren. Da zu einem Tetraeder vier Flächen gehören, ist der Quanten-Tetraeder mit den kleinsten möglichen Flächen im Hilbert-Raum

$$\mathrm{H}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \mathrm{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathrm{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathrm{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathrm{H}_{\frac{1}{2}} \tag{13.8.8}$$

zu beschreiben. Es ist allerdings nur der Unterraum $\mathrm{K}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ relevant, dessen Vektoren $|v\rangle$ die Bedingung (13.7.3) erfüllen. Übertragen in den Hilbert-Raum geht die Bedingung in

$$\begin{aligned}\Big(\hat{\mathrm{E}}_i(S_a)+\hat{\mathrm{E}}_i(S_b)+\hat{\mathrm{E}}_i(S_c)+\hat{\mathrm{E}}_i(S_d)\Big)\,|v\rangle \\ =\Big(\frac{\sigma_i}{2}\Big|_a+\frac{\sigma_i}{2}\Big|_b+\frac{\sigma_i}{2}\Big|_c+\frac{\sigma_i}{2}\Big|_d\Big)\,|v\rangle \quad = \quad 0\end{aligned} \tag{13.8.9}$$

mit

$$|v\rangle=\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}b_0\\b_1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}c_0\\c_1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}d_0\\d_1\end{pmatrix} \tag{13.8.10}$$

über. Dies bedeutet, dass sich der Vektor $|v\rangle$ bei gleichzeitigen infinitesimalen SU(2)-Transformationen nicht ändert und dass der gesamte Unterraum invariant sein muss

$$\mathrm{K}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=\mathrm{Inv}_{\mathrm{SU}(2)}\Big(\mathrm{H}_{\frac{1}{2}}\otimes\mathrm{H}_{\frac{1}{2}}\otimes\mathrm{H}_{\frac{1}{2}}\otimes\mathrm{H}_{\frac{1}{2}}\Big) \quad . \tag{13.8.11}$$

Den Produktraum kann man nun in folgende SU(2)-invariante Unterräume zerlegen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}&=\big(0\oplus1\big)\otimes\big(0\oplus1\big)\\ &=\quad 0\oplus1\oplus1\oplus\big(1\otimes1\big)=\;0\oplus1\oplus1\oplus0\oplus1\oplus2\quad .\end{aligned} \tag{13.8.12}$$

Es gibt danach zwei triviale Repräsentationen; d.h. der Unterraum $\mathrm{K}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ ist 2-dimensional und lässt sich durch zwei unabhängige invariante Tensoren mit vier Spinor-Indizes $A,B,C,D\in\{0,1\}$ aufspannen. Diese kann man mit Hilfe des antisymmetrischen Tensors

$$\big(\epsilon^{AB}\big)=\big(\epsilon_{AB}\big)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\epsilon \tag{13.8.13}$$

konstruieren. Der ϵ-Tensor selbst ist invariant bei SU(2)-Transformationen

$$U^{A'}{}_{A}\,U^{B'}{}_{B}\,\epsilon^{AB}=\epsilon^{A'B'}\quad\Longleftrightarrow\quad U\epsilon U^{T}=\epsilon \quad . \tag{13.8.14}$$

Dies ist sehr leicht in der direkten Matrixdarstellung

$$U(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta^*&\alpha^*\end{pmatrix}\qquad\text{mit}\quad|\alpha|^2+|\beta|^2=1 \tag{13.8.15}$$

der SU(2)-Transformation verifizierbar. Mit diesen Vorüberlegungen kann man die beiden Tensoren

$$X^{ABCD} = \epsilon^{AB}\epsilon^{CD} \tag{13.8.16}$$

$$Y^{ABCD} = \left(\sigma_i\epsilon\right)^{AB}\left(\sigma_i\epsilon\right)^{CD} \quad . \tag{13.8.17}$$

bilden, wobei mit Komponenten geschrieben

$$\left(\sigma_i\epsilon\right)^{EF} = \sigma_{i\,G}^{E}\,\epsilon^{GF} \tag{13.8.18}$$

ist. Während die Invarianz von X^{ABCD} ganz offensichtlich ist, kann man die Invarianz von Y^{ABCD} durch Ausnutzung der Identität

$$\sigma_{i\,G}^{A}\,\sigma_{i\,H}^{C} = \delta_H^A\delta_G^C - \epsilon^{AC}\epsilon_{GH} \tag{13.8.19}$$

einsehen. Diese verdeutlicht, dass auch Y^{ABCD} letztlich aus Invarianten der SU(2)-Transformation aufgebaut ist. Die beiden (nicht orthogonalen) Tensoren X^{ABCD} und Y^{ABCD} spannen den Hilbert-Raum für den Volumenoperator auf.

13.9 Das minimale Volumen

Es soll nun das Volumen des kleinsten Quanten-Tetraeders ermittelt werden. Angewendet auf einen beliebigen Tensor $Z^{ABCD} \in \mathrm{K}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ liefert der Volumen-Operator

$$\left(\hat{V}^2 Z\right)^{ABCD} = \frac{2}{9}\left(\frac{\beta}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \epsilon_{ijk}\,\sigma_{i\,A'}^{A}\,\sigma_{j\,B'}^{B}\,\sigma_{k\,C'}^{C}\,Z^{A'B'C'D} \quad . \tag{13.9.1}$$

Insbesondere ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\hat{V}^2 X\right)^{ABCD} &= \frac{\beta^3}{288}\cdot\epsilon_{ijk}\,\sigma_{i\,A'}^{A}\,\sigma_{j\,B'}^{B}\,\sigma_{k\,C'}^{C}\,\epsilon^{A'B'}\epsilon^{C'D} \\ &= \frac{\beta^3}{288}\cdot\epsilon_{ijk}\,\sigma_{i\,A'}^{A}\,\epsilon^{A'B'}\,\sigma_{j\,B'}^{B}\,\sigma_{k\,C'}^{C}\,\epsilon^{C'D} \\ &= \frac{\beta^3}{288}\cdot\left(\epsilon_{ijk}\,\sigma_i\,\epsilon\,\sigma_j^T\right)^{AB}\left(\sigma_k\epsilon\right)^{CD} \quad .\end{aligned} \tag{13.9.2}$$

Weiter wird unter Ausnutzung von $\epsilon^2 = -1_{2\times 2}$ sowie $\epsilon\,\sigma_j^T\epsilon = \sigma_j$

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\,\sigma_i\,\epsilon\,\sigma_j^T &= -\epsilon_{ijk}\,\sigma_i\,\epsilon\,\sigma_j^T\epsilon^2 \\ &= -\epsilon_{ijk}\,\sigma_i\,\sigma_j\epsilon \quad = \quad -2i\sigma_k\epsilon \quad ,\end{aligned} \tag{13.9.3}$$

so dass sich schließlich

$$\left(\hat{V}^2 X\right)^{ABCD} = \frac{\beta^3}{288} \cdot (-2i) \left(\sigma_i \epsilon\right)^{AB} \left(\sigma_i \epsilon\right)^{CD} = -i \, \frac{\beta^3}{144} \cdot Y^{ABCD} \tag{13.9.4}$$

ergibt. Analog wird

$$\begin{aligned} \left(\hat{V}^2 Y\right)^{ABCD} &= \frac{\beta^3}{288} \cdot \epsilon_{ijk} \, \sigma_{i\, A'}^{A} \, \sigma_{j\, B'}^{B} \, \sigma_{k\, C'}^{C} \left(\sigma_\ell \epsilon\right)^{A'B'} \left(\sigma_\ell \epsilon\right)^{C'D} \\ &= \frac{\beta^3}{288} \cdot \left(\epsilon_{ijk} \sigma_i \sigma_\ell \epsilon \sigma_j^T \right)^{AB} \left(\sigma_k \sigma_\ell \epsilon \right)^{CD} \\ &= -\frac{\beta^3}{288} \cdot \left(\epsilon_{ijk} \sigma_i \sigma_\ell \sigma_j \epsilon \right)^{AB} \left(\left(\delta_{k\ell} + i \epsilon_{klm} \sigma_m \right) \epsilon \right)^{CD} \quad . \end{aligned} \tag{13.9.5}$$

Für die einzelnen Terme folgt

$$\epsilon_{ijk} \sigma_i \sigma_\ell \sigma_j \delta_{k\ell} = \epsilon_{ijk} \sigma_i \sigma_k \sigma_j \; = \; -6i \cdot 1_{2\times 2} \tag{13.9.6}$$

sowie

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \sigma_i \sigma_\ell \sigma_j i \epsilon_{k\ell m} &= i \left(\delta_\ell^i \delta_m^j - \delta_\ell^j \delta_m^i \right) \sigma_i \sigma_\ell \sigma_j \\ &= i \sigma_\ell \sigma_\ell \sigma_m - i \sigma_m \sigma_\ell \sigma_\ell \quad = \; 0 \qquad . \end{aligned} \tag{13.9.7}$$

Insgesamt erhält man mit den vorstehenden Termen

$$\left(\hat{V}^2 Y\right)^{ABCD} = -\frac{\beta^3}{288} \cdot (-6i) \epsilon^{AB} \epsilon^{CD} = 3i \, \frac{\beta^3}{144} \cdot X^{ABCD} \qquad . \tag{13.9.8}$$

Geht man für einen beliebigen Tensor zu seinen Komponenten in der gewählten Basis über

$$Z^{ABCD} = z_1 X^{ABCD} + z_2 Y^{ABCD} \qquad \Longleftrightarrow \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad , \tag{13.9.9}$$

so ergibt sich für den Volumenoperator die Matrixdarstellung

$$\hat{V}_M^2 = \frac{\beta^3}{144} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 3i & 0 \end{pmatrix} \qquad . \tag{13.9.10}$$

Dies ermöglicht es, die Eigenwerte des Volumenoperators aus der Beziehung

$$\det \left| \frac{\beta^3}{144} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 3i & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \tag{13.9.11}$$

zu ermitteln. Es folgt

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}\,\beta^3}{144} \qquad . \tag{13.9.12}$$

Bei dem Vorzeichen ist zu beachten, dass $\hat{V}_M^2$ ein orientiertes Quadrat des Volumenoperator ist und von der relativen Orientierung der Flüsse abhängt; d.h. die Eigenwerte des Volumens sind $V_i = \sqrt{|\lambda_i|}$. Berücksichtigt man den unterdrückten Faktor $16\pi G$, so ergibt sich schließlich für das Volumen des kleinsten möglichen Quanten-Tetraeders

$$V_{min} = \left(16\pi G\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3}\,\beta^3}{144}} = \frac{\left(8\pi\beta\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{6\sqrt{3}}}\,\ell^3_{\text{Planck}} \qquad . \tag{13.9.13}$$

In einem cm^3 passen also ungefähr 10^{100} Quanten-Tetraeder mit minimalem Volumen.

13.10 Spin-Netzwerke

Einen Quanten-Tetraeder kann man als Raumatom interpretieren. In den bereits erwähnten Spin-Netzwerken tritt er als Knoten auf, von dem vier Holonomien ausgehen. Allgemein kann man die Knoten eines Spin-Netzwerks anschaulich als Quanten-Polyeder auffassen.

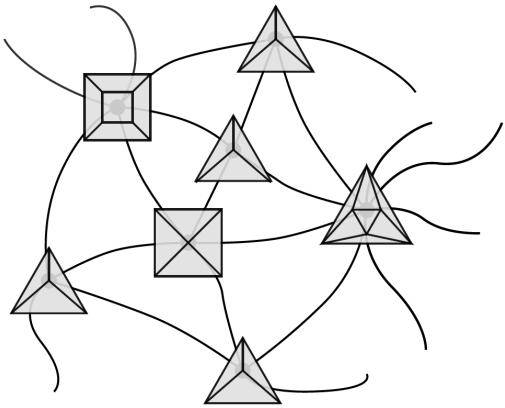


Abbildung 13.1: Anschauliches Schema eines Spin-Netzwerks

Die Kanten in einem Spin-Netzwerk sind Parallel-Propagatoren für Spinoren. Jeder Kante ist dabei eine eigener Spin j zugeordnet. Die Flächenoperatoren wirken auf die Kanten des Spin-Netzwerks und, da dies Parallel-Propagatoren von Spin-j Spinoren sind, gilt

$$\hat{F}(S)\mathcal{H}^{(j)}(\gamma) = 8\,\pi\beta\,\ell^2_{\text{Planck}} \cdot \sqrt{j(j+1)}\,\mathcal{H}^{(j)}(\gamma) \qquad . \tag{13.10.1}$$

Treffen sich N Parallel-Propagatoren in einem Knoten, dann ist der Quantenzustand des zugehörigen Quanten-Polyeders mit N Flächen im Produktraum

$$\mathrm{H}_{j_1 j_2 \cdots j_N} = \mathrm{H}_{j_1} \otimes \mathrm{H}_{j_2} \otimes \cdots \otimes \mathrm{H}_{j_N} \tag{13.10.2}$$

darzustellen. Wie beim Quanten-Tetraeder müssen die Zustandsvektoren des Quanten-Polyeders die Bedingung

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \hat{\mathrm{E}}_i(S_\alpha) \right) |v\rangle = 0 \tag{13.10.3}$$

für eine geschlossene Oberfläche erfüllen. Der Quanten-Polyeder ist somit im Unterraum

$$\mathrm{K}_{j_1 j_2 \cdots j_N} = \mathrm{Inv}_{\mathrm{SU}(2)} \left(\mathrm{H}_{j_1} \otimes \mathrm{H}_{j_2} \otimes \cdots \otimes \mathrm{H}_{j_N} \right) \tag{13.10.4}$$

der SU(2)-invarianten Tensoren zu beschreiben. Dies bedeutet aber auch, dass im Spin-Netzwerk an einem Knoten nur Kombinationen $j_1, j_2, \ldots, j_N$ von Spins zulässig sind, für die solche invarianten Tensoren existieren. Auf diese sogenannten Intertwiner wirkt der zugehörige Volumenoperator. Seine Eigenwerte lassen sich nur in sehr wenigen Fällen analytisch berechnen, sondern sind numerisch zu ermitteln.

Die sich im Quanten-Polyeder treffenden Parallel-Propagatoren werden im Knoten durch die Intertwiner vollständig verknüpft. Auf diese Weise entsteht das Äquivalent zu Wilson-Loops. Da sich SU(2)-Transformationen der Parallel-Propagatoren nur an deren Anfangs- bzw. Endpunkten auswirken und die verknüpfenden Intertwiner SU(2)-invariant sind, ist ein Spin-Netzwerk insgesamt invariant. Dabei ist es zweckmäßig, die Basis des Intertwiner-Raumes so zu wählen, dass die Matrixdarstellung des Volumenoperator diagonal wird. Die Spin-Netzwerke sind dann Eigenzustände des Volumenoperators.

Die Eigenbasis des Volumenoperators für einen minimalen Quanten-Tetraeder ergibt sich mit den Ergebnissen des vorstehenden Abschnitts zu

$$Z^{ABCD}_{\pm} = i\sqrt{3}\,X^{ABCD} \pm Y^{ABCD} \qquad . \tag{13.10.5}$$

Man verifiziert

$$\begin{aligned}\left(\hat{V}^2 Z_\pm\right)^{ABCD} &= i\sqrt{3}\left(\hat{V}^2 X\right)^{ABCD} \pm \left(\hat{V}^2 Y\right)^{ABCD} \\ &= i\sqrt{3}\left(-i\,\frac{\beta^3}{144}\right)\cdot Y^{ABCD} \pm 3i\,\frac{\beta^3}{144}\cdot X^{ABCD} \\ &= \pm\frac{\sqrt{3}\,\beta^3}{144}\left(i\sqrt{3}\cdot X^{ABCD} \pm Y^{ABCD}\right) \\ &= \pm\frac{\sqrt{3}\,\beta^3}{144}\cdot Z_\pm^{ABCD} \qquad . \end{aligned} \tag{13.10.6}$$

Ein Spin-Netzwerk bestehend aus zwei minimalen Quanten-Tetraedern, bei dem alle Parallel-Propagatoren von einem zum anderen Knoten laufen, kann dann beispielsweise durch

$$\Psi[A] = Z^+_{A'B'C'D'}\,\mathcal{H}^{A'}{}_{A}\,\mathcal{H}^{B'}{}_{B}\,\mathcal{H}^{C'}{}_{C}\,\mathcal{H}^{D'}{}_{D}\,Z_-^{ABCD} \tag{13.10.7}$$

beschrieben werden, wobei abkürzend $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(\frac{1}{2})}(\gamma)$ verwendet wurde. Die SU(2)-Invarianz ist offensichtlich. Dieses Spin-Netzwerk ist zudem ein Eigenzustand des Flächen- als auch des Volumenoperators.

Die Ausführungen zeigen, dass der Raum und seine Geometrie durch das Spin-Netzwerk repräsentiert werden und nicht durch die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit, in die das Spin-Netzwerk eingebettet ist. Die Quanten-Polyeder befinden sich nicht im physikalischen Raum, sondern bauen diesen erst auf.

Teil IV

Die Nukleosynthese der Elemente

Kapitel 14

Zustandsgrößen

Da in der makroskopischen Thermodynamik viele Größen auftreten, die das Gebiet leicht unübersichtlich erscheinen lassen, eine kurze Zusammenstellung der thermodynamischen Zustandsgrößen und deren Beziehungen zueinander.

14.1 Fundamentale Zustandgrößen

Man unterscheidet extensive und intensive Zustandsgrößen. Spaltet man ein System in kleinere Teile auf, so teilen sich extensive Zustandsgrößen dazu proportional auf, während intensive Zustandsgrößen unverändert bleiben.

Extensive Zustandsgrößen:

- innere Energie U
- Volumen V
- Teilchenzahl N

Zugeordnete intensive Zustandsgrößen:

- Temperatur T
- Druck P
- chemisches Potential μ

Erster Hauptsatz der Thermodynamik:

$$dU = \delta Q - PdV + \mu dN \tag{14.1.1}$$

Anmerkung: Die vorstehenden Zustandsgrößen sind alle direkt messbar. Der 1. Hauptsatz drückt die Energieerhaltung aus. Dabei wurde $\delta W_{\text{sonstige}} = 0$ angenommen. Das chemische Potential bezieht sich hierbei nur auf die innere Energie, da keine Erzeugung oder Vernichtung von Teilchen betrachtet wird und dN deshalb im Gegensatz zur Teilchenphysik hier nur für den Transport von Teilchen über die Systemgrenze steht.

Zustandsgröße Entropie:
Wird dem System eine Wärmemenge δQ über die Systemgrenzen zugeführt, kann man über das Differential

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \tag{14.1.2}$$

die Zustandsgröße Entropie prozedural definieren. Aus der Definition folgt die fundamentale Beziehung

$$dU = TdS - PdV + \mu dN \tag{14.1.3}$$

zu den anderen Zustandsgrößen. Aus dieser sieht man, dass die Entropie ebenfalls eine extensive Zustandsgröße ist. Für die zugehörigen auf ein Volumenelement bezogenen Größen (Entropiedichte, Energiedichte, Anzahldichte) ergibt sich die in der Kosmologie wichtige Beziehung

$$dS = \frac{dU + P\,dV - \mu\,dN}{T} \qquad \Longrightarrow \qquad s = \frac{u + P - \mu\,n}{T} \quad . \tag{14.1.4}$$

Da alle Differentiale in (14.1.3) extensiv sind, folgt die homogene Beziehung

$$S(\alpha U, \alpha V, \alpha N) = \alpha S(U, V, N) \quad . \tag{14.1.5}$$

Ableitung nach α und dann $\alpha = 1$ setzen liefert (Euler'scher Satz)

$$S(U,V,N) = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} U + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} V + \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} N \quad . \tag{14.1.6}$$

Nun kann man aus (14.1.3)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T}\,; \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{P}{T}\,; \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} = -\frac{\mu}{T} \tag{14.1.7}$$

ablesen. Dies eingesetzt ergibt die sogenannte Euler-Gleichung

$$S = \frac{U + PV - \mu N}{T} \quad . \tag{14.1.8}$$

Diese ist das triviale Integral von (14.1.3). Dies ist verblüffend, da auch T, P und μ Funktionen von U, V und N sind. Bildet man das vollständige Differential von (14.1.8) und zieht hiervon (14.1.3) ab, so folgt für das thermische Gleichgewicht die Gibbs-Duhem-Beziehung

$$SdT - Vdp + Nd\mu = 0 \quad , \tag{14.1.9}$$

die zeigt, dass die intensiven Zustandsgrößen nicht unabhängig voneinander sind. Gleichung (14.1.8) verdeutlicht, dass die Entropie tatsächlich eine Zustandsgröße ist, obwohl sie prozedural eingeführt wurde.

Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik:
Bei Prozessen in einem isolierten System gilt immer

$$\Delta S = S_{\text{Endzustand}} - S_{\text{Anfangszustand}} \geq 0 \tag{14.1.10}$$

für die Entropieänderung zwischen dem Anfangs- und Endzustand.

14.2 Abgeleitete Zustandgrößen

Je nachdem, welchen speziellen thermodynamischen Prozess man betrachten möchte, ist es zweckmäßig, neue Zustandsgrößen einzuführen und als Rechengrößen zu verwenden.

Abgeleitete Zustandsgrößen:

- freie Energie $F = U - TS$
- Enthalpie $H = U + PV$
- freie Enthalpie $G = H - TS$
- großkanonisches Potential $J = F - \mu N$

Äquivalente Bezeichnungen:

- freie Energie: Helmholtz-Potential, Helmholtz-Energie
- Enthalpie: Wärmeinhalt
- freie Enthalpie: Gibbs-Energie
- großkanonische Potential: Landau-Potential

Alle eingeführten Zustandsgrößen enthalten die gleichen Informationen über das betrachtete System. Es ist eine Frage der Zweckmäßigkeit, welche Zustandsgröße man verwendet. Dies hängt im Wesentlichen davon ab, welche Größen in einem zu analysierenden Prozess konstant bleiben.

14.3 Gleichgewichtsbedingungen

Mit der Beziehung (14.1.3) für die innere Energie

$$dU = T\,dS - PdV + \mu dN \tag{14.3.1}$$

ergeben sich im thermischen Gleichgewicht für die abgeleiteten Zustandsgrößen die Differentiale:

$$\begin{aligned} dF &= d\Big(U - TS\Big) = dU - SdT - TdS \\ &= -pdV + \mu dN - SdT \end{aligned} \tag{14.3.2}$$

$$\begin{aligned} dH &= d\Big(U + PV\Big) = dU + VdP + PdV \\ &= TdS + \mu dN + VdP \end{aligned} \tag{14.3.3}$$

$$\begin{aligned} dG &= d\Big(U + PV - TS\Big) = dU + VdP + PdV - TdS - SdT \\ &= \mu dN + VdP - SdT \end{aligned} \tag{14.3.4}$$

$$\begin{aligned} dJ &= d\Big(U - TS - \mu N\Big) = dU - SdT - TdS - Nd\mu - \mu dN \\ &= -PdV - SdT - Nd\mu \end{aligned} \tag{14.3.5}$$

Diese führen zu den Gleichgewichtsbedingungen:

Konstant gehaltene Größen	**Gleichgewichtsbedingung**
U, V, N	Maximum der Entropie S
S, V, N	Minimum der inneren Energie U
V, N, T	Minimum der freien Energie F
S, N, P	Minimum der Enthalpie H
N, P, T	Minimum der freien Enthalpie G
V, T, μ	Minimum des gk. Potentials J

Kapitel 15

Quantengase

Ergänzung zur Thermodynamik

15.1 Vorbetrachtungen

Die Quantenstatistik befasst sich mit ununterscheidbaren (nicht notwendig elementaren) Teilchen; d.h. mit Bosonen und Fermionen. Deren Statistik lässt sich praktisch gleich behandeln, wenn man ein System so in Teilsysteme unterteilt, dass jedes eine sehr große Anzahl von Zuständen und Teilchen umfasst. Dabei soll

- V das Volumen,
- N die *mittlere* Anzahl aller Teilchen und
- U die *mittlere* Gesamtenergie

eines sogenannten großkanonischen Systems sein. Kennzeichnet

- ν einen einzelnen Mikrozustand des Systems,
- w_ν die Wahrscheinlichkeit dieses Mikrozustandes und ist
- Ω die Gesamtzahl aller Mikrozustände des Systems

dann definiert man die Entropie des zugehörigen Makrozustandes des Systems durch

$$S = -\sum_{\nu=1}^{\Omega} w_\nu \ln w_\nu \qquad . \tag{15.1.1}$$

Achtung: U steht hier für die gesamte relativistisch definierte Energie unter Einschluss der Ruhemassen und nicht nur für die innere Energie.

Die statistische Physik basiert auf dem grundlegenden Postulat:

- Im statistischen Gleichgewicht eines Systems wird jeder mögliche Mikrozustand mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $w_\nu = 1/\Omega$ angetroffen.

Der Grund hierfür ist, dass in Systemen mit vielen Teilchen die Bewegung oftmals chaotisch ist. Aus diesem Postulat folgt im statistischen Gleichgewicht für die Entropie

$$S = -\sum_{\nu=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{\Omega}\right) \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right) = \ln \Omega \qquad . \tag{15.1.2}$$

Es folgt weiter, dass sich das System die meiste Zeit in dem Makrozustand aufhält, zu dem die meisten Mikrozustände gehören. Typischerweise umfasst dieser Makrozustand fast alle erlaubten Mikrozustände. Im statistischen Gleichgewicht wird man ein System somit faktisch nur in dem Makrozustand mit der maximalen Entropie beobachten können.

Ordnet man zu jedem Zeitpunkt die Teilchen in verschiedene Energiebereiche $E_i \leq E < E_{i+1}$ mit $E_{i+1} = E_i + \Delta E$ ein und definiert auf diese Weise Teilsysteme, sind die weiteren Bezeichnungen

- $\mathcal{Z}_i$: Anzahl der 1-Teilchen-Zustände im Energiebereich i
- $\mathcal{N}_i$: mittlere Anzahl der Teilchen im Energiebereich i
- $\mathcal{E}_i$: mittlere Energie eines Teilchens im Energiebereich i
- Ω_i: Anzahl aller Mikrozustände im Energiebereich i

zweckmäßig. Es sollen nun dünne ideale Quantengase betrachtet werden. Dies bedeutet

$$\mathcal{Z}_i \gg \mathcal{N}_i \gg 1 \tag{15.1.3}$$

und stellt sicher, dass die folgenden Überlegungen für Bosonen und Fermionen gleichermaßen gültig sind. Dann wird die Anzahl der Mikrozustände des Gesamtsystems

$$\Omega = \prod_i \Omega_i \tag{15.1.4}$$

sowie die Entropie im statistischen Gleichgewicht

$$S = \ln \Omega = \ln \prod_i \Omega_i = \sum_i \ln \Omega_i \qquad . \tag{15.1.5}$$

Führt man zudem die mittleren Besetzungszahlen

$$f_i = \frac{\mathcal{N}_i}{\mathcal{Z}_i} \tag{15.1.6}$$

der Zustände im Energiebereich i ein, kann man als Nebenbedingung für die mittlere Anzahl aller Teilchen

$$N = \sum_i f_i \mathcal{Z}_i \tag{15.1.7}$$

sowie als Nebenbedingung für die mittlere Gesamtenergie

$$U = \sum_i f_i \mathcal{E}_i \mathcal{Z}_i \tag{15.1.8}$$

formulieren. Die Gesamtheit der mittleren Besetzungszahlen definiert einen Makrozustand $\{\mathcal{N}_i\}$ und wird als Verteilungsfunktion bezeichnet.

15.2 Einstein-Bose-Verteilung

Jeder mögliche 1-Teichen-Zustand kann von beliebig vielen Bosonen besetzt sein. Die Zahl der möglichen Mikrozustände kann man anschaulich ermitteln, wenn man die $\mathcal{Z}_i$ Zustände als Intervalle interpretiert, die durch $\mathcal{Z}_i - 1$ Trennwände getrennt sind und diese Trennwände zusammen mit den $\mathcal{N}_i$ Teilchen als neue Objekte auffasst. Aus einer beliebig gewählten Anordnung dieser Objekte kann man alle mögliche Anordnungen durch Permutation erzeugen, von denen es insgesamt $(\mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_i - 1)!$ gibt. Da sowohl die Teilchen als auch die Trennwände ununterscheidbar sind, folgt für die Anzahl der Mikrozustände

$$\Omega_i = \frac{(\mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_i - 1)!}{\mathcal{N}_i!(\mathcal{Z}_i - 1)!} \qquad . \tag{15.2.1}$$

Für die weitere Auswertung wird die für sehr hohe Zahlen M anwendbare Stirling-Formel

$$\ln(M!) = \sum_{x=1}^{M} \ln x \simeq M \ln M - M \tag{15.2.2}$$

benutzt. Unter Ausnutzung von $\mathcal{Z}_i \gg \mathcal{N}_i \gg 1$ wird

$$\begin{aligned}
\ln \Omega_i &= \ln (\mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_i - 1)! - \ln \mathcal{N}_i! - \ln (\mathcal{Z}_i - 1)! \\
&\simeq (\mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_i - 1) \ln (\mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_i - 1) - \mathcal{N}_i \ln \mathcal{N}_i - (\mathcal{Z}_i - 1) \ln (\mathcal{Z}_i - 1) \\
&\simeq (\mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_i) \ln (\mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_i) - \mathcal{N}_i \ln \mathcal{N}_i - \mathcal{Z}_i \ln \mathcal{Z}_i \\
&= (\mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_i) \ln (\mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_i) - \mathcal{N}_i \ln \mathcal{N}_i - \mathcal{Z}_i \ln \mathcal{Z}_i \\
&\quad - (\mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_i) \ln \mathcal{Z}_i + (\mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_i) \ln \mathcal{Z}_i \\
&= \Big((f_i + 1) \ln (f_i + 1) - f_i \ln f_i \Big) \mathcal{Z}_i \qquad . \qquad (15.2.3)
\end{aligned}$$

Der im statistischen Gleichgewicht faktisch beobachtbare Makrozustand $\{\mathcal{N}_i\}$ ergibt sich durch Maximierung der Entropie unter Beachtung der Nebenbedingungen. Mit Lagrange-Multiplikatoren α und β folgt durch Variation von

$$\begin{aligned}
\Phi(\{f_i\}) &= S(\{f_i\}) + \alpha \Big(N(\{f_i\}) - N \Big) - \beta \Big(E(\{f_i\}) - U \Big) \\
&= -\alpha N + \beta U + \sum_i \Big(\ln \Omega_i + \alpha f_i \mathcal{Z}_i - \beta \mathcal{E}_i f_i \mathcal{Z}_i \Big) \\
&\simeq -\alpha N + \beta U + \sum_i \Big((f_i + 1) \ln (f_i + 1) - f_i \ln f_i + \alpha f_i - \beta \mathcal{E}_i f_i \Big) \mathcal{Z}_i
\end{aligned}$$

nach den mittleren Besetzungszahlen f_i für jedes i

$$\ln (f_i + 1) + 1 - \ln f_i - 1 + \alpha - \beta \mathcal{E}_i = 0 \qquad . \qquad (15.2.4)$$

Hieraus ergeben sich die mittleren Besetzungszahlen

$$f_i = \frac{1}{\exp\Big(\beta \mathcal{E}_i - \alpha \Big) - 1} \qquad . \qquad (15.2.5)$$

15.3 Fermi-Dirac-Verteilung

Jeder mögliche 1-Teilchen-Zustand kann nur von maximal einem Fermion besetzt sein. Die Anzahl der Mikrozustände entspricht damit der Anzahl der Möglichkeiten die $\mathcal{N}_i$ als besetzt zu interpretierende Zustände aus den $\mathcal{Z}_i$ Zuständen auszuwählen. Dies bedeutet

$$\Omega_i = \binom{\mathcal{Z}_i}{\mathcal{N}_i} = \frac{\mathcal{Z}_i!}{\mathcal{N}_i! (\mathcal{Z}_i - \mathcal{N}_i)!} \qquad . \qquad (15.3.1)$$

Damit wird für ein dünnes Quantengas mit $\mathcal{Z}_i \gg \mathcal{N}_i \gg 1$

$$\begin{aligned}\ln\Omega_i &= \ln\mathcal{Z}_i! - \ln\mathcal{N}_i! - \ln(\mathcal{Z}_i-\mathcal{N}_i)! \\ &\simeq \mathcal{Z}_i\ln\mathcal{Z}_i - \mathcal{N}_i\ln\mathcal{N}_i - (\mathcal{Z}_i-\mathcal{N}_i)\ln(\mathcal{Z}_i-\mathcal{N}_i) \\ &= \mathcal{Z}_i\ln\mathcal{Z}_i - \mathcal{N}_i\ln\mathcal{N}_i - (\mathcal{Z}_i-\mathcal{N}_i)\ln(\mathcal{Z}_i-\mathcal{N}_i) \\ &\quad + (\mathcal{Z}_i-\mathcal{N}_i)\ln\mathcal{Z}_i - (\mathcal{Z}_i-\mathcal{N}_i)\ln\mathcal{Z}_i \\ &= \Big((f_i-1)\ln(1-f_i) - f_i\ln f_i\Big)\mathcal{Z}_i \qquad . \end{aligned} \tag{15.3.2}$$

Die Verteilungsfunktion ergibt sich wiederum durch Variation von

$$\begin{aligned}\Phi(\{f_i\}) &= S(\{f_i\}) + \alpha\Big(N(\{f_i\}) - N\Big) - \beta\Big(E(\{f_i\}) - U\Big) \\ &= -\alpha N + \beta U + \sum_i\Big(\ln\Omega_i + \alpha f_i\mathcal{Z}_i - \beta\mathcal{E}_i f_i\mathcal{Z}_i\Big) \\ &\simeq -\alpha N + \beta U + \sum_i\Big((f_i-1)\ln(1-f_i) - f_i\ln f_i + \alpha f_i - \beta\mathcal{E}_i f_i\Big)\mathcal{Z}_i\end{aligned}$$

nach den mittleren Besetzungszahlen f_i für jedes i aus

$$\ln(1-f_i) + 1 - \ln f_i - 1 + \alpha - \beta\mathcal{E}_i = 0 \qquad . \tag{15.3.3}$$

Hieraus ergeben sich die mittleren Besetzungszahlen

$$f_i = \frac{1}{\exp\Big(\beta\mathcal{E}_i - \alpha\Big) + 1} \qquad . \tag{15.3.4}$$

15.4 Plausibilitätsbetrachtung

Bei den Vorbemerkungen wurde gesagt, dass im statistischen Gleichgewicht der Makrozustand mit den meisten Mikrozuständen typischerweise fast alle erlaubten Mikrozustände umfasst. Dies soll in diesem Abschnitt durch eine Plausibilitätsbetrachtung untermauert werden.

Da ein Makrozustand durch die Menge der Besetzungszahlen $\{\mathcal{N}_i\}$ beschrieben wird, soll hierzu noch einmal die auf die Besetzungszahlen umgeschriebene Funktion

$$\begin{aligned}\Phi &= S(\{f_i\}) + \alpha\Big(N(\{f_i\}) - N\Big) - \beta\Big(E(\{f_i\}) - U\Big) \\ &= -\alpha N + \beta U + \sum_i\Big(\ln\Omega_i + \alpha\mathcal{N}_i - \beta\mathcal{E}_i\mathcal{N}_i\Big)\end{aligned} \tag{15.4.1}$$

betrachtet werden. Dabei war

$$\ln \Omega_i \;\simeq\; \mp \mathcal{Z}_i \ln \mathcal{Z}_i - \mathcal{N}_i \ln \mathcal{N}_i \pm (\mathcal{Z}_i \pm \mathcal{N}_i) \ln (\mathcal{Z}_i \pm \mathcal{N}_i) \qquad , \tag{15.4.2}$$

wobei das obere Vorzeichen für Bosonen und das untere für Fermionen gilt. Nachstehend wird auch in anderen Formeln diese Konvention verwendet. Im konkreten Fall ist jeweils auf die Wahl des richtige Vorzeichen zu achten.

Entwickelt man diese Funktion um eine Referenzbesetzung $\{\widetilde{\mathcal{N}}_i\}$, dann reicht es aus für kleines

$$\Delta\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_i - \widetilde{\mathcal{N}}_i \tag{15.4.3}$$

nur die ersten Glieder der Taylor-Reihenentwicklung

$$\Phi\big(\{\mathcal{N}_i\}\big) \simeq \Phi\big(\{\widetilde{\mathcal{N}}_i\}\big) + \sum_j \Delta\mathcal{N}_j \cdot \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{N}_j}\right|_{\widetilde{\mathcal{N}}_j} + \sum_{j,k} \frac{\Delta\mathcal{N}_j \Delta\mathcal{N}_k}{2} \cdot \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathcal{N}_j\,\partial\mathcal{N}_k}\right|_{\widetilde{\mathcal{N}}_j;\widetilde{\mathcal{N}}_k}$$

zu berücksichtigen. Dabei ergibt sich für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathcal{N}_j\,\partial\mathcal{N}_k} &= \sum_i \frac{\partial^2 \ln\Omega_i}{\partial\mathcal{N}_j\,\partial\mathcal{N}_k} \\
&= \sum_i \delta_{ij}\,\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_k}\Big(-\ln\mathcal{N}_i + \ln\big(\mathcal{Z}_i \pm \mathcal{N}_i\big)\Big) \\
&\simeq \sum_i \delta_{ij}\,\left(-\frac{\delta_{ik}}{\mathcal{N}_i}\right) \\
&= -\frac{\delta_{jk}}{\mathcal{N}_j} \qquad .
\end{aligned} \tag{15.4.4}$$

Dies eingesetzt führt zu

$$\begin{aligned}
\Phi\big(\{\mathcal{N}_i\}\big) &= \Phi\big(\{\widetilde{\mathcal{N}}_i\}\big) + \sum_j \Delta\mathcal{N}_j \cdot \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{N}_j}\right|_{\widetilde{\mathcal{N}}_j} + \quad \sum_{j,k} \frac{\Delta\mathcal{N}_j\Delta\mathcal{N}_k}{2} \cdot \left(-\frac{\delta_{jk}}{\widetilde{\mathcal{N}}_j}\right) \\
&= \Phi\big(\{\widetilde{\mathcal{N}}_i\}\big) + \sum_j \Delta\mathcal{N}_j \cdot \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{N}_j}\right|_{\widetilde{\mathcal{N}}_j} - \quad \frac{1}{2}\sum_j \widetilde{\mathcal{N}}_j \left(\frac{\Delta\mathcal{N}_j}{\widetilde{\mathcal{N}}_j}\right)^2 \qquad .
\end{aligned} \tag{15.4.5}$$

Da für alle Makrozustände natürlich die Nebenbedingungen erfüllt sind, gilt immer

$$\Phi\big(\{\mathcal{N}_i\}\big) = \ln\Omega\big(\{\mathcal{N}_i\}\big) \qquad \text{sowie} \qquad \Phi\big(\{\widetilde{\mathcal{N}}_i\}\big) = \ln\Omega\big(\{\widetilde{\mathcal{N}}_i\}\big) \qquad . \tag{15.4.6}$$

Wählt man nun als Referenzbesetzung den Makrozustand mit den meisten Mikrozuständen aus, dann verschwindet die erste Ableitung und es folgt

$$\begin{aligned}\Omega\big(\{\mathcal{N}_i\}\big) &= \exp\Big(\Phi\big(\{\mathcal{N}_i\}\big)\Big) \\ &= \exp\left(\Phi\big(\{\widetilde{\mathcal{N}}_i\}\big) - \frac{1}{2}\sum_i \widetilde{\mathcal{N}}_i \left(\frac{\Delta\mathcal{N}_i}{\widetilde{\mathcal{N}}_i}\right)^2\right) \\ &= \Omega\big(\{\widetilde{\mathcal{N}}_i\}\big)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_i \widetilde{\mathcal{N}}_i \left(\frac{\Delta\mathcal{N}_i}{\widetilde{\mathcal{N}}_i}\right)^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{15.4.7}$$

Die Makrozustände, bei denen der Exponent im zweiten Term in der Größenordnung von 1 ist, umfassen zusammen mit dem Makrozustand, der die meisten Mikrozustände enthält, fast den gesamten zugänglichen Phasenraum. Dies sind allerdings nur die extrem eng benachbarten Makrozustände. Alle anderen Makrozustände sind exponentiell unterdrückt. Um dies zu veranschaulichen, soll der einfache Fall

$$\frac{|\Delta\mathcal{N}_i|}{\widetilde{\mathcal{N}}_i} = \text{ unabhängig von } i = \Delta \tag{15.4.8}$$

betrachtet werden. Die Beziehung (15.4.7) geht dann über in

$$\frac{\Omega\big(\{\mathcal{N}_i\}\big)}{\Omega\big(\{\widetilde{\mathcal{N}}_i\}\big)} = \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2}\sum_i \widetilde{\mathcal{N}}_i\right) = \exp\left(-N\,\frac{\Delta^2}{2}\right) \quad . \tag{15.4.9}$$

Hieraus folgt schon für einen relative nahen Makrozustand mit $\Delta = 10^{-6}$ bei $N = 6.022\cdot 10^{23}$ Teilchen, wie sie in einem Mol enthalten sind,

$$\frac{\Omega\big(\{\mathcal{N}_i\}\big)}{\Omega\big(\{\widetilde{\mathcal{N}}_i\}\big)} \approx \exp\left(-6\cdot 10^{23}\cdot\frac{\big(10^{-6}\big)^2}{2}\right) \approx \mathcal{O}\left(\frac{1}{10^{\left(10^{11}\right)}}\right) \quad . \tag{15.4.10}$$

Dies macht plausibel, dass im statistischen Gleichgewicht der Makrozustand mit den meisten Mikrozuständen zusammen mit den extrem eng benachbarten Makrozuständen fast alle erlaubten Mikrozustände umfasst und das Maximum wegen der sehr hohen Anzahl von Teilchen extrem ausgeprägt ist.

15.5 Übergang zur Thermodynamik

Für die Verteilungsfunktion eines Quantengases von Teilchen auf die verschiedenen Energiebereiche hat sich aus den vorstehenden Ableitungen

$$f_i = \frac{1}{\exp\Big(\beta\mathcal{E}_i - \alpha\Big) \mp 1} \tag{15.5.1}$$

ergeben. Für die Anzahl der Mikrozustände im Energiebereich i folgt

$$\begin{aligned}
\ln\Omega_i &\simeq \Big(\left(f_i \pm 1\right)\ln\left(1 \pm f_i\right) - f_i \ln f_i \Big)\mathcal{Z}_i \\
&= \left(f_i \ln\left(\frac{1}{f_i} \pm 1\right) \pm \ln\left(1 \pm f_i\right) \right)\mathcal{Z}_i \\
&= \Big(f_i\left(\beta\mathcal{E}_i - \alpha\right) \pm \ln\left(1 \pm f_i\right) \Big)\mathcal{Z}_i \\
&= \pm\mathcal{Z}_i \ln\left(1 \pm f_i\right) + \beta f_i \mathcal{E}_i \mathcal{Z}_i - \alpha f_i \mathcal{Z}_i \qquad .
\end{aligned} \tag{15.5.2}$$

Damit ergibt sich für die Entropie

$$S = \sum_i \ln\Omega_i \;\simeq\; \pm\sum_i \mathcal{Z}_i \ln\left(1 \pm f_i\right) + \beta U - \alpha N \tag{15.5.3}$$

Führt man zur vereinfachten Schreibweise

$$\ln\mathcal{Z}_g = \pm\sum_i \mathcal{Z}_i \ln\left(1 \pm f_i\right) \tag{15.5.4}$$

ein, so folgt für das vollständige Differential

$$\begin{aligned}
dS = \left(\frac{\partial\ln\mathcal{Z}_g}{\partial\beta}\right)_{\alpha,V} d\beta + \left(\frac{\partial\ln\mathcal{Z}_g}{\partial\alpha}\right)_{\beta,V} d\alpha + \left(\frac{\partial\ln\mathcal{Z}_g}{\partial V}\right)_{\alpha,\beta} dV \\
+ U d\beta + \beta dU - N d\alpha - \alpha dN \qquad .
\end{aligned} \tag{15.5.5}$$

Nutzt man die beiden Ableitungen

$$\frac{\partial\ln(1 \pm f_i)}{\partial\beta} = \frac{\pm 1}{1 \pm f_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial\beta} = \mp f_i \mathcal{E}_i \quad \Longrightarrow \quad U = -\frac{\partial\ln\mathcal{Z}_g}{\partial\beta} \tag{15.5.6}$$

$$\frac{\partial\ln(1 \pm f_i)}{\partial\alpha} = \frac{\pm 1}{1 \pm f_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial\alpha} = \pm f_i \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{\partial\ln\mathcal{Z}_g}{\partial\alpha} \tag{15.5.7}$$

aus und setzt sie in (15.5.5) ein, liefert dies

$$dS = \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_g}{\partial V}\right)_{\alpha,\beta} dV + \beta dU - \alpha dN \qquad . \tag{15.5.8}$$

Vergleich mit der korrespondierenden Beziehung

$$dS = \frac{PdV + dU_c - \mu_c dN}{T} \tag{15.5.9}$$

der klassischen Thermodynamik, in der die innere Energie U_c und das sich darauf beziehende chemische Potential μ_c zur Unterscheidung mit einem Index gekennzeichnet wurden, liefert

$$\beta = \frac{1}{T} \qquad \text{sowie} \qquad \alpha = \frac{\mu}{T} \qquad , \tag{15.5.10}$$

wobei in dem chemischen Potential μ nun die Ruheenergie eines Teilchen mit einzubeziehen ist. Im klassischen Grenzfall niedriger Energien gilt (siehe hierzu auch (15.8.12)) $\quad U \simeq m\,N + U_c \quad$ sowie $\quad \mu \simeq m + \mu_c$.

Damit ergibt sich im statistischen Gleichgewicht schließlich der Makrozustand mit der Verteilungsfunktionen

$$f_i = \frac{1}{\exp\left(\frac{\mathcal{E}_i - \mu}{T}\right) \mp 1} \qquad . \tag{15.5.11}$$

15.6 Der Druck

Vergleich von (15.5.8) und (15.5.9) zeigt, dass für den Druck

$$P = T \cdot \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_g}{\partial V}\right)_{\alpha,\beta} = T \cdot \left(\pm \sum_i \frac{\partial \mathcal{Z}_i}{\partial V}\, \ln(1 \pm f_i)\right) \tag{15.6.1}$$

gelten muss. Weiter unten in (15.7.5) wird gezeigt, dass in einem engen Energiebereich die Anzahl der Freiheitsgrade im Phasenraum direkt proportional zum Volumen ist, woraus

$$\frac{\partial \mathcal{Z}_i}{\partial V} = \frac{\mathcal{Z}_i}{V} \tag{15.6.2}$$

folgt. Da zudem nach Voraussetzung

$$f_i \ll 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \ln(1 \pm f_i) \simeq \pm f_i \tag{15.6.3}$$

ist, ergibt sich für den Druck mit dieser Näherung

$$P \simeq T \cdot \left(\pm \sum_i \frac{\mathcal{Z}_i}{V} \left(\pm f_i \right) \right) = T \cdot \frac{N}{V} \quad . \tag{15.6.4}$$

Dies ist das ideale Gasgesetz. Es erlaubt eine Beziehung zu der Definition des Drucks in der Mechanik herzustellen.

Zur Berechnung des Druckes in einem idealen Gas mit Hilfe der Mechanik sollen ein Würfel mit dem Volumen $V = L^3$ und die Randfläche A senkrecht zur x-Richtung betrachtet werden. Bewegt sich ein Teilchen mit der Geschwindigkeit $v_x > 0$ auf diese Fläche zu, dann ist die Wahrscheinlichkeit in einem Zeitintervall Δt auf sie zu treffen

$$w = \left. \frac{A\, v_x \Delta t}{V} \right|_{v_x > 0} = \left. \frac{A\, p_x \Delta t}{V E} \right|_{p_x > 0} \quad . \tag{15.6.5}$$

Die Impulsänderung Δp_x, die das Teilchen bei einer Reflexion erfährt, ist

$$\Delta p_x = \left. 2 p_x \right|_{p_x > 0} \quad . \tag{15.6.6}$$

Hieraus ergibt sich für den Druck, den im Energiebereich i alle Teilchen zusammen auf die Randfläche ausüben

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i = \frac{\mathcal{F}_i}{A} = \frac{\mathcal{N}_i}{A} \cdot \frac{\langle \Delta p_x \rangle}{\Delta t} = \frac{\mathcal{N}_i}{A} \cdot \frac{\langle w \cdot 2 p_x \rangle |_{p_x > 0}}{\Delta t} \\ = \left. \frac{\mathcal{N}_i}{V} \cdot \frac{2 \langle p_x^2 \rangle}{\mathcal{E}_i} \right|_{p_x > 0} = \frac{\mathcal{N}_i}{V} \cdot \frac{\langle p_x^2 \rangle}{\mathcal{E}_i} \quad . \end{aligned} \tag{15.6.7}$$

Wegen der vorliegenden Symmetrien muss

$$\langle p_x^2 \rangle = \langle p_y^2 \rangle = \langle p_z^2 \rangle \qquad \Longrightarrow \qquad \langle p_x^2 \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{3} \simeq \frac{p_i^2}{3} \tag{15.6.8}$$

gelten und es folgt für den gesamten Druck

$$P = \sum_i \mathcal{P}_i \simeq \sum_i \frac{\mathcal{N}_i}{V} \cdot \frac{p_i^2}{3 \mathcal{E}_i} = \frac{1}{V} \cdot \sum_i f_i \, \frac{p_i^2}{3 \mathcal{E}_i} \, \mathcal{Z}_i \quad . \tag{15.6.9}$$

Der Vergleich mit (15.6.4) liefert

$$T \cdot N = \sum_i f_i \, \frac{p_i^2}{3 \mathcal{E}_i} \, \mathcal{Z}_i \quad . \tag{15.6.10}$$

Damit ergibt sich für die mittlere kinetische Energie eines einzelnen Teilchens und der Temperatur eines Quantengases der Zusammenhang

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{N} \cdot \sum_i \mathcal{N}_i \, \frac{p_i^2}{2\mathcal{E}_i} = \frac{1}{N} \cdot \sum_i f_i \, \frac{p_i^2}{2\mathcal{E}_i} \, \mathcal{Z}_i = \frac{3}{2} \, T \qquad . \tag{15.6.11}$$

15.7 Grenzübergang zum Kontinuum

Die Anzahl der Mikrozustände im Phasenraum lässt sich durch Betrachtung eines räumlichen Volumens $V = L^3$ bestimmen. Nimmt man periodische Randbedingungen an, dann ist die Wellenfunktion eines Teilchens eine stehende Welle und die Komponenten des Impulses können nur die diskreten Werte

$$p_a = \ell_a \cdot \frac{2\pi\hbar}{L} \quad \text{mit} \quad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{15.7.1}$$

annehmen, während das Teilchen im Ortsraum vollständig über das Volumen $V = L^3$ verschmiert ist. Da der Abstand zwischen zwei benachbarten Impulswerten

$$\Delta p_a = \frac{2\pi\hbar}{L} \tag{15.7.2}$$

ist, folgt für einen 1-Teilchen-Zustand im 6-dimensionalen Phasenraum das Phasenraumvolumen

$$\omega = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = L^3 \left(\frac{2\pi\hbar}{L} \right)^3 = \left(2\pi\hbar \right)^3 \qquad . \tag{15.7.3}$$

Besitzt ein Teilchen g innere Freiheitsgrade, so folgt unter Ausnutzung der Konvention $\hbar = 1$ und der Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = m^2 + p^2 \qquad \Longrightarrow \qquad p \, dp = E \, dE \tag{15.7.4}$$

eines freien Teilchens für die Anzahl der Mikrozustände $\mathcal{Z}_i$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_i &= g \int_V \int_{E_i}^{E_i + \Delta E} \frac{d^3x \, d^3p}{\omega} \\ &= \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \int_{E_i}^{E_i + \Delta E} 4\pi p^2 dp \\ &= \frac{gV}{(2\pi)^3} \int_{E_i}^{E_i + \Delta E} 4\pi \sqrt{E^2 - m^2} \; E \, dE \\ &\simeq \frac{gV}{2\pi^2} \, E_{iM} \sqrt{E_{iM}^2 - m^2} \; \Delta E \end{aligned} \tag{15.7.5}$$

mit nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung geeignetem

$$E_i \leq E_{iM} \leq E_i + \Delta E \qquad . \tag{15.7.6}$$

Die vorstehende Beziehung bedingt

$$\Delta E \longrightarrow 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{E}_i \, , E_{iM} \longrightarrow E_i \qquad . \tag{15.7.7}$$

Damit folgt für eine beliebige Observable über dem Phasenraum

$$\begin{aligned} O &= \lim_{\Delta E \to 0} \quad \sum_i f_i \mathcal{O}_i Z_i \\ &= \lim_{\Delta E \to 0} \quad \sum_i f_i \mathcal{O}_i \cdot \frac{gV}{2\pi^2} \, E_i \sqrt{E_i^2 - m^2} \; \Delta E \\ &= \quad V \cdot \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty f(E,T,\mu) \, \mathcal{O}(E) \, E \sqrt{E^2 - m^2} \; dE \end{aligned} \tag{15.7.8}$$

mit der Verteilungsfunktion

$$f(E,T,\mu) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{T}\right) \mp 1} \qquad . \tag{15.7.9}$$

Dabei ist wiederum das negative Vorzeichen bei Bosonen und das positive Vorzeichen bei Fermionen zu verwenden. Man beachte, dass die Observable O sich auf das gesamte Volumen bezieht. Aus diesen Überlegungen folgt insbesondere mit $\mathcal{O}(E) = 1$ für die Anzahldichte $n = N/V$ der Teilchen

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty f(E,T,\mu) \, E \sqrt{E^2 - m^2} \; dE \qquad , \tag{15.7.10}$$

mit $\mathcal{O}(E) = E$ für die Energiedichte $u = U/V$ im Volumen

$$u = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty f(E,T,\mu) \, E^2 \sqrt{E^2 - m^2} \; dE \tag{15.7.11}$$

sowie mit $\mathcal{O}(E) = p^2/(3E)$ für den Druck

$$\begin{aligned} P &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty f(E,T,\mu) \cdot \frac{p^2}{3E} \cdot E \sqrt{E^2 - m^2} \; dE \\ &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty f(E,T,\mu) \cdot \frac{E^2 - m^2}{3} \cdot \sqrt{E^2 - m^2} \; dE \\ &= \frac{u}{3} - \frac{m^2 g}{6\pi^2} \int_m^\infty f(E,T,\mu) \, \sqrt{E^2 - m^2} \; dE \qquad . \end{aligned} \tag{15.7.12}$$

Die vorstehenden Beziehungen machen die Bedeutung der Temperatur und des chemischen Potentials als Parameter eines Makrozustandes deutlich.

15.8 Die Zustandssumme

Nach Definition war

$$\ln \mathcal{Z}_g = \pm \sum_i \mathcal{Z}_i \ln (1 \pm f_i) \quad . \tag{15.8.1}$$

Aus (15.5.11) ergibt sich

$$1 \pm f_i = \frac{1}{1 \mp \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_i - \mu}{T}\right)} \quad . \tag{15.8.2}$$

Daraus folgt

$$\sum_i \mathcal{Z}_i \ln (1 \pm f_i) = -\sum_i \mathcal{Z}_i \ln \left(1 \mp \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_i - \mu}{T}\right)\right) \quad . \tag{15.8.3}$$

Bei einer genügend schmalen Breite ΔE der Energiebereiche i, kann man statt über die Energiebereiche mit jeweils ihrer mittleren Energie auch über alle tatsächlich besetzten Zustände aller Energiebereiche summieren. Nummeriert man diese mit z durch und ist die Energie des z-ten besetzten Zustandes E_z dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_i \mathcal{Z}_i \ln (1 \pm f_i) &= -\sum_z \ln \left(1 \mp \exp\left(-\frac{E_z - \mu}{T}\right)\right) \\ &= -\ln \left(\prod_z \left(1 \mp \exp\left(-\frac{E_z - \mu}{T}\right)\right)\right) \quad . \end{aligned} \tag{15.8.4}$$

Dies in (15.8.1) eingesetzt liefert

$$Z_{gk} = \prod_z \left(1 \mp \exp\left(-\frac{E_z - \mu}{T}\right)\right)^{\mp 1} \quad . \tag{15.8.5}$$

In der Statistischen Thermodynamik wird gezeigt, dass dies die Zustandssumme eines großkanonischen Ensembles ist. Hierzu sei auf die umfangreiche Literatur verwiesen.

Betrachtet man für Teilchen mit Masse den nicht-relativistischen Grenzfall

$$T \ll m - \mu \qquad \Longrightarrow \qquad \exp\left(-\frac{E_z - \mu}{T}\right) \ll 1 \quad , \tag{15.8.6}$$

dann folgt

$$\ln Z_{gk} = \mp \sum_z \ln\left(1 \mp \exp\left(-\frac{E_z - \mu}{T}\right)\right)$$
$$\simeq \sum_z \exp\left(-\frac{E_z - \mu}{T}\right) \quad . \tag{15.8.7}$$

Summiert man statt über die einzelnen besetzten Zustände nur über die *verschiedenen* Energiewerte, dann ergibt sich die Darstellung

$$\ln Z_{gk} \simeq \exp\left(\frac{\mu}{T}\right) \sum_n g_n \exp\left(-\frac{E_n}{T}\right) \quad , \tag{15.8.8}$$

in der g_n den Entartungsgrad bei der Energie E_n bezeichnet. Dies ist die Große Zustandssumme eines klassischen idealen Gases.

Mit g inneren Freiheitsgraden ist beim Übergang zum Kontinuum offensichtlich

$$g_n = g \cdot \frac{d^3x\, d^3p}{\omega} = g \cdot \frac{d^3x\, d^3p}{(2\pi)^3} \quad . \tag{15.8.9}$$

Mit den früheren Bezeichnungen $\alpha = \mu/T$ sowie $\beta = 1/T$ bedeutet dies

$$\ln Z_{gk} = e^{\alpha} \cdot \int e^{-\beta E} \cdot g \cdot \frac{d^3x\, d^3p}{(2\pi)^3}$$
$$= e^{\alpha} \cdot V \cdot \frac{g}{2\pi^2} \int_m^{\infty} e^{-\beta E}\, E\sqrt{E^2 - m^2}\; dE$$
$$\simeq e^{\alpha} \cdot V \cdot g \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{3/2} e^{-\beta m} \qquad \text{für} \quad \beta m \gg 1 \quad . \tag{15.8.10}$$

Diese Zustandssumme führt mit (15.5.7), (15.5.6) sowie (15.6.1) zu den klassischen thermodynamischen Beziehungen für ein ideales Gas:

$$N = \frac{\partial \ln Z_{gk}}{\partial \alpha} = \ln Z_{gk} \tag{15.8.11}$$

$$U = -\frac{\partial \ln Z_{gk}}{\partial \beta} = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\beta} + m\right) \cdot \ln Z_{gk} = N \cdot \left(m + \frac{3}{2}\, T\right) \tag{15.8.12}$$

$$P = T \cdot \frac{\partial \ln Z_{gk}}{\partial V} = \frac{T}{V} \cdot \ln Z_{gk} = \frac{T}{V} \cdot N \tag{15.8.13}$$

Kapitel 16

Das ideale Gas

Ergänzende klassische Ableitung; es werden SI-Einheiten verwendet.

16.1 Die Zustandsgleichung

Es wird ein nicht-relativistisches ideales Gas betrachtet, das in

- einem Volumen V eingeschlossen ist,
- in dem sich N Gasteilchen
- mit einer Gesamtmasse M befinden
- und das die Temperatur T besitzt.

Nach dem Gleichverteilungssatz besitzt im thermischen Gleichgewicht jeder Freiheitsgrad eines Systems die gleiche mittlere Energie von

$$\langle E \rangle_{\text{ein Freiheitsgrad}} = \frac{1}{2}\, k_B T \qquad , \tag{16.1.1}$$

wobei $k_B \approx 1.3806 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$ für die Boltzmann-Konstante steht. Damit folgt für den Beitrag von Gasteilchen der Masse m durch ihren Freiheitsgrad der Bewegung in x-Richtung

$$\frac{1}{2}\,\langle m v_x^2 \rangle = \langle E_{x,kin} \rangle = \frac{1}{2}\, k_B T \qquad . \tag{16.1.2}$$

Als Volumen soll nun ein zylindrischer Körper mit einer Randfläche A senkrecht zur x-Richtung betrachtet werden. Bewegt sich ein Teilchen mit der

Geschwindigkeit $v_x > 0$ auf diese Fläche zu, dann ist die Wahrscheinlichkeit in einem Zeitintervall Δt auf sie zu treffen

$$w = \left.\frac{A\, v_x \Delta t}{V}\right|_{v_x>0} \quad . \tag{16.1.3}$$

Die Impulsänderung Δp_x, die ein Teilchen bei einer Reflexion erfährt, ist nun

$$\Delta p_x = 2mv_x|_{v_x>0} \quad . \tag{16.1.4}$$

Hieraus ergibt sich für den Druck, den alle Teilchen zusammen auf die Fläche ausüben

$$\begin{aligned} P = \frac{F}{A} = \frac{N \cdot \frac{\langle \Delta p_x \rangle}{\Delta t}}{A} = \frac{N \cdot \langle w \cdot 2mv_x \rangle|_{v_x>0}}{\Delta t\, A} \\ = \left.\frac{N \cdot 2\langle mv_x^2 \rangle}{V}\right|_{v_x>0} = \frac{N \cdot \langle mv_x^2 \rangle}{V} \quad . \end{aligned} \tag{16.1.5}$$

Zusammen mit (16.1.2) erhält man schließlich die Zustandsgleichung

$$P \cdot V = N \cdot k_B T \quad \Longrightarrow \quad P = n \cdot k_B T \quad , \tag{16.1.6}$$

wobei in der letzten Beziehung die Anzahldichte $n = N/V$ eingeführt wurde. Diese Zustandsgleichung wird in den unterschiedlichsten Formen dargestellt. Führt man die Massendichte $\rho = M/V$ ein, sowie mit Hilfe der atomaren Masseneinheit $m_u = 1.6605{\cdot}10^{-24}$ g die mittlere molekulare Masse pro Teilchen

$$\mu = \frac{M}{N\, m_u} \quad , \tag{16.1.7}$$

kann man die Zustandsgleichung entsprechend

$$P = \frac{\rho\, k_B T}{\mu m_u} \tag{16.1.8}$$

umformulieren.

Oftmals wird auch mit der Stoffmenge $N_{\mathrm{mol}} = N/N_A$ statt mit der Anzahl N der Teilchen gearbeitet. Dabei steht $N_A \approx 6.0221{\cdot}10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$ für die Avogadro-Konstante. Dies führt zu der Formulierung der Zustandsgleichung

$$P \cdot V = N_{\mathrm{mol}} \cdot R \cdot T \tag{16.1.9}$$

mit der allgemeine Gaskonstanten

$$R = N_A k_B \approx 8.3145 \, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}} \qquad . \tag{16.1.10}$$

Anmerkung: Die atomare Masseneinheit und die Avogadro-Konstante sind nicht unabhängig voneinander, sondern so definiert, dass sie die Beziehung

$$m_u \cdot N_A = 1 \, \mathrm{g/mol} \tag{16.1.11}$$

erfüllen.

16.2 Adiabatische Prozesse

Bezeichnet U_c die innere Energie eines Systems, Q die mit der Umgebung ausgetauschte Wärmeenergie und W die am System geleistete Arbeit, dann lautet der erste Hauptsatz der Thermodynamik

$$dU_c = \delta Q + \delta W \qquad . \tag{16.2.1}$$

Dabei besteht die Vorzeichenkonvention, dass Energiebeträge positiv sind, wenn das System sie aufnimmt bzw. am System Arbeit verrichtet wird.

Bei einem adiabatischen Prozess findet kein Austausch von Wärmeenergie mit der Umgebung statt. Für ein ideales Gas bedeutet dies

$$\delta Q = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad dU_c = \delta W = -P dV \qquad . \tag{16.2.2}$$

Nun ist die innere Energie eines Gases im thermischen Gleichgewicht

$$U_c = N \cdot \frac{f}{2} \cdot k_B T \qquad , \tag{16.2.3}$$

wenn jedes Gasteilchen f Freiheitsgrade besitzt. Unter Ausnutzung der Zustandsgleichung ergibt sich für ein ideales Gas

$$N \cdot \frac{f}{2} \cdot k_B dT = dU_c = -P dV = -\frac{N \cdot k_B T}{V} \, dV \tag{16.2.4}$$

bzw. nach Umformung

$$\frac{dT}{T} = -\frac{2}{f} \cdot \frac{dV}{V} \qquad \Longrightarrow \qquad T \propto \left(\frac{1}{V} \right)^{2/f} \qquad . \tag{16.2.5}$$

Nun ist für ein ideales Gas

$$V \propto \frac{T}{P} \tag{16.2.6}$$

und damit folgt für einen adiabatischen Prozess weiter

$$T \propto \left(\frac{1}{V}\right)^{2/f} \propto \left(\frac{P}{T}\right)^{2/f} \qquad \text{bzw.} \qquad T \propto P^{\left(\frac{2}{f+2}\right)} \quad . \tag{16.2.7}$$

Anmerkung: Allgemein definiert man einen Adiabatenexponenten γ durch die Beziehung

$$T \propto P^{\gamma} \quad . \tag{16.2.8}$$

Dabei gilt für den hier relevanten Fall

$$\gamma = \frac{f+2}{f} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = \frac{2}{\gamma - 1} \quad . \tag{16.2.9}$$

Literaturverzeichnis

[Aoy18] **T.Aoyama; T.Kinoshita; M.Nio**
Revised and Improved Value of the QED Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment
arXiv:hep-ph/1712.06060v2; 2018

[Aoy19] **T.Aoyama; T.Kinoshita; M.Nio**
Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron
Atoms 2019, 7, 28

[Cab17] **F.Cabral; F.S.N.Lobo**
Electrodynamics and spacetime geometry: Astropysical applications
arXiv:gr-gc/1603.08180v3; 2017

[Cvi78] **P.Cvitanovic; B.Lautrup; R.B.Pearson**
Number and weights of Feynman diagrams
Phys.Rev., Vol.18, 6; 1978

[Cod18] **E.Tiesinga; P.J.Mohr; D.B.Newell; et al.**
CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constant: 2018
J.Phy.Chem.Ref.Data 50, 033105 (2021)
https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html

[End09] **M.Ender**
Das Standardmodell der Teilchenphysik
http://www.manfred-ender.serpedon.de; 2009

[Gab86] **J.S.Brown; G.Gabrielse**
Geonium-Theory: Physics of a single electron in a Penning trap
Rev.Mod.Phy., Vol.58, No.1; 1986

[Gam18] **J.Gamboa; F.Mendez; M.B.Paranjape; B.Sirois**
The twin paradox: the role of acceleration
arXiv:gr-gc/1807.02148v1; 2018

[Han10] **D.Hanneke; S.F.Hoogerheide; G.Gabrielse**
Cavity Control of a Single-Electron Cyclotron: Measuring the Electron Magnetic Moment
arXiv:physics.atom-ph/1009.4831v1; 2010

[Hel70] **H.Hellwig et.al.**
Measurement of the Unperturbed Hydrogen Hyperfine Transition Frequency
IEEE Transactions on Instr. and Measurement, Vol.19, 4; 1970

[Ior04] **L.Iori**
An analytical treatment of the Clock Paradox
arXiv:physics/0405038v5; 2004

[Jac95] **T.Jacobsen**
Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State
arXiv:gr-gc/9504004v2; 1995

[Kar06] **S.Kar; S.SebGupta**
The Raychaudhuri equations: a brief review
arXiv:gr-gc/0611123v1; 2006

[Lau99] **B.Lautrup; H.Zinkernagel**
g-2 and the Trust in Experimental Results
Stud.Hist.Phil.Mod.Phys., Vol.30, No.1, 1999

[Lec17] **G.Leckenby**
Solving the Twin's Paradox with Special Relativity
Cross seciton, No.XII (September); 2017
https://studentjournals.anu.edu.au/index.php/cs/article/view/89
abgerufen: 12.08.23

[Par18] **R.H.Parker et.al.**
Measurement of the Fine Structure Constant as a Test of the Standard Modell
arXiv:physics.atom-ph/1812.04130; 2018

[Per79] **R.Perrin**
Twin paradox: A complete treatment from the point of view of each twin
Am.J.Phys. Vol.47(4); 1979

[Sch11] **B.Schabinger**
Ein Experiment zur Bestimmung des g-Faktors des gebundenen Elektrons in wasserstoff- und lithiumaehnlichen mittelschweren Ionen
Johannes Gutenberg Universitaet in Mainz, Dissertation 2011

[Sch07] **C.Schiller**
Motion Mountain: The Adventure of Physics
http://www.motionmountain.net; 2007

[Sch21] **C.Schiller**
Tests for Maximum Force and Maximum Power
arXiv:gr-gc/2112.15418; 2021

[Sle07] **R.Schlickeiser**
Theoretische Physik III: Quantenmechanik
Vorlesungsskript; Bochum 2007

[Sch48] **J.Schwinger**
On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron
Phys.Rev., **73**, 416; 1948

[Stu14] **S.Sturm et.al.**
High-precision measurement of the atomic mass of the electron
arXiv:physics.atom-ph/1496.5590; 2014

[Uen54] **Y.Ueno**
On the Wave Theory of Light in General Relativity
Progress of Theoretical Physics, Vol. 12, No. 4, October 1954

[Yer18] **V.A.Yerokhin; K.Pachucki; V.Patkos**
Theory of Lamb shift in hydrogen and light hydrogen-like ions
arXiv:physics.atom-ph/1809.00462v3; 2018