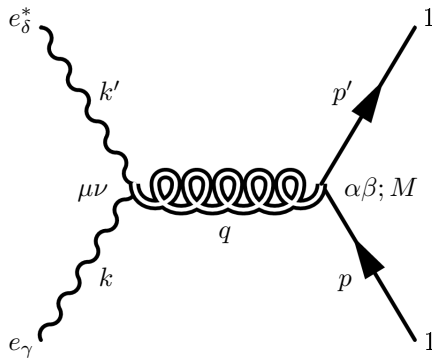


Perturbative Quantengravitation



Manfred Ender

April 2022

Korrekturstand: 05/2022
webmaster@manfred-ender.serpedon.de

Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
1 Das Äquivalenzprinzip	3
1.1 Einführende Betrachtung	3
1.2 Konsequenzen der Lorentz-Invarianz	7
1.3 Die Ladungserhaltung	13
1.4 Das Äquivalenzprinzip	16
1.5 Exkurs: Spin-s Felder	19
2 Das Graviton-Feld	21
2.1 Eigenschaften des Gravitons	21
2.2 Der Lagrange-Skalar des Maxwell-Feldes	22
2.3 Der Lagrange-Skalar des Graviton-Feldes	23
2.4 Die Feldgleichungen des Graviton-Feldes	27
2.5 Der Graviton-Propagator	29
3 Die Selbstkopplung des Gravitons	31
3.1 Die spurverschobene Darstellung	31
3.2 Die Selbstkopplung des Graviton-Feldes	36
3.3 Der Energie-Impulsdichte-Tensor	37
3.4 Die Einstein-Gleichung	40
3.5 Die Feldgleichung bei Selbstkopplung	42
4 Graviton-Materie-Kopplung	45
4.1 Einführung eines neuen Spin-2 Feldes	45
4.2 Die wechselwirkenden Felder	46
4.3 Übergang zu Operatoren	49
4.4 Der 2-Skalar-1-Graviton Vertex	51
4.5 Der 2-Photon-1-Graviton Vertex	52

5	Störungsrechnungen	55
5.1	Das Gravitationsgesetz	55
5.2	Die gravitative Rotverschiebung	57
5.3	Die Perihelverschiebung des Merkurs	57
5.4	Die Lichtablenkung	60
5.5	Der Shapiro-Effekt	63
5.6	Abschließende Anmerkung	68
	Literaturverzeichnis	69

Einführung

In meinen Büchern

- Das Standardmodell der Teilchenphysik
- Die Allgemeine Relativitätstheorie

sind verteilt über die Texte einzelne Aspekte der auf Spin-2 Teilchen basierenden Quantengravitation diskutiert worden. In diesem Text habe ich diese Teile übernommen, ergänzt und in Zusammenhang gesetzt. Dies erschien mir interessant, weil die Spin-2 Theorie zu einer konsistenten Theorie der Quantengravitation führt und in der Literatur einige Aspekte selten gemeinsam dargestellt werden. In den einzelnen Kapiteln sind die Rechnungen wieder sehr detailliert ausgeführt. Die Aspekte betreffend der Quantenfeldtheorie werden allerdings als bekannt vorausgesetzt.

Die einzelnen Kapitel sind wie folgt aufgebaut:

Kapitel 1: Das Äquivalenzprinzip

In diesem Kapitel wird eine Variante des Äquivalenzprinzips der Allgemeinen Relativitätstheorie aus der Quantenfeldtheorie abgeleitet. Aus Sicht der QFT ist das Äquivalenzprinzip keine unabhängige Annahme. Es wird gezeigt, dass die Forderung nach der Lorentz-Invarianz von Spin-2 Feldern zu deren Eichinvarianz führt, aus der dann das Äquivalenzprinzip folgt.

Kapitel 2: Das Graviton-Feld

Es wird gezeigt, dass das masselose Spin-2 Teilchen mit dem Graviton identifiziert werden kann. Durch die Forderung der Eichinvarianz wird der Lagrange-Skalar des Spin-2 Feldes bestimmt. Abschließend wird der Graviton-Propagator ermittelt.

Kapitel 3: Die Selbstkopplung des Gravitons

Die vollen nichtlinearen Einstein-Gleichungen des Gravitationsfeldes werden in diesem Kapitel aus der linearen Feldgleichung des Gravitons konstruiert. Wesentlich hierfür ist die Selbstwechselwirkung des Gravitons, indem es an den eigenen Energie-Impulsdichte-Tensor koppelt.

Kapitel 4: Graviton-Materie-Kopplung

Der Lagrange-Skalar für Materiefelder der vollen nichtlinearen Allgemeinen Relativitätstheorie wird gewonnen. Nach Übergang zu Operatoren werden die Vertexfaktoren für die 2-Skalar-1-Graviton und die 2-Photon-1-Graviton Kopplung bestimmt.

Kapitel 5: Störungsrechnungen

Durch Auswertung der korrespondierenden Feynman-Diagramme werden

- das klassische Gravitationspotential,
- die gravitative Rotverschiebung,
- die Perihelverschiebung des Merkurs,
- die Lichtablenkung am Sonnenrand
- sowie der Shapiro-Effekt

berechnet und gezeigt, dass die auf diesem Weg gewonnenen Ergebnisse mit denen der Allgemeinen Relativitätstheorie identisch sind.

Hinweise zur Notation

Für die Metrik wird die bei den Teilchenphysikern übliche Signatur

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

verwendet. Um Formeln so übersichtlich wie möglich zu halten, wird in diesem Text mit den natürlichen Einheiten der Elementarteilchenphysik

$$c = \hbar = \epsilon_0 = 1$$

gearbeitet. Die Newtonsche Gravitationskonstante in natürlichen Einheiten kann man aus der Beziehung

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} = 6.709 \cdot 10^{-39} \frac{\hbar c^5}{(\text{GeV})^2} \quad (0.0.1)$$

ablesen. Im Kapitel 5 wird allerdings teilweise auf SI-Einheiten übergegangen.

Kapitel 1

Das Äquivalenzprinzip

In diesem Kapitel wird eine Variante des Äquivalenzprinzips der Allgemeinen Relativitätstheorie aus der Quantenfeldtheorie abgeleitet. Aus Sicht der QFT ist das Äquivalenzprinzip keine unabhängige Annahme, sondern ergibt sich aus der Lorentz-Invarianz für masselose Spin-2 Teilchen als Vermittler der gravitativen Wechselwirkung. Dies wurde erstmals 1964 von Steven Weinberg [Wei64] gezeigt. Eine gute Darstellung findet sich auch in seinem Buch [Wei95].

1.1 Einführende Betrachtung

In der Natur wird eine Vielzahl von Teilchen beobachtet. Die Existenz dieser Teilchen wird aus den Beobachtungen bei Zerfallsprozessen und bei Stoßprozessen geschlossen. Ursache der Zerfallsprozesse ist vorwiegend die schwache Wechselwirkung, während bei Stoßprozessen die elektrische und die starke Wechselwirkung von Bedeutung sind. Die elektrische Wechselwirkung wird auch verwendet, um die Teilchenbahnen in entsprechenden Detektoren zu interpretieren. In jedem Falle ist es notwendig, Teilchenerzeugung und -vernichtung zu beschreiben; d.h. eine Beschreibung der Dynamik von Vielteilchensystemen zu entwickeln.

Ein Mehrteilchenzustand identischer Teilchen wird in der Quantenfeldtheorie abstrakt durch einen ket-Vektor im Hilbert-Raum

$$|\eta; m, (\vec{p}_1, s_1), \dots, (\vec{p}_n, s_n)\rangle \quad (1.1.1)$$

beschrieben, wobei η für die Teilchensorte, m für die Masse eines der Teilchen und (\vec{p}_i, s_i) für die Impulse bzw. Spinwerte stehen.

Ein quantenmechanischer Mehrteilchenzustand unterscheidet sich dabei grundsätzlich von einem makroskopischen Mehrteilchenzustand. Im Mikroskopischen ist es nicht möglich Marken zur Unterscheidung der einzelnen Teilchen anzubringen; d.h. die Teilchen besitzen keine Individualität und sind in Strenge nicht unterscheidbar. Da der Vakuumzustand eindeutig ist und die Elementarteilchen einer Sorte nicht unterscheidbar sind, ist es möglich Erzeugungsoperatoren $\hat{a}^\dagger(\vec{p}, s)$ zu definieren, die entsprechend

$$|\eta; m, (\vec{p}, s)\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{p}, s) |0\rangle \quad (1.1.2)$$

einen Einteilchenzustand mit Masse m , Impuls \vec{p} und Spin s aus dem Vakuumzustand erzeugen. Mehrfache Anwendung des Erzeugungsoperators liefert dann einen Mehrteilchenzustand identischer Teilchen

$$|\eta; m, (\vec{p}_1, s_1), \dots, (\vec{p}_n, s_n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^\dagger(\vec{p}_n, s_n) \dots \hat{a}^\dagger(\vec{p}_1, s_1) |0\rangle \quad (1.1.3)$$

Der Normierungsfaktor ist notwendig, da die Reihenfolge der Argumente im Zustandsvektor keine Bedeutung hat; es handelt sich um die Quantenzahlen von n nicht unterscheidbaren Teilchen. Zudem wurde angenommen, dass alle Quantenzahlen (\vec{p}_i, s_i) verschieden sind (der Normierungsfaktor ist sonst komplizierter aufgebaut). Führt man nun zudem durch

$$\hat{a}(\vec{q}, s) |\eta; m, (\vec{p}, s')\rangle = \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{ss'} |0\rangle \quad (1.1.4)$$

einen Vernichtungsoperator ein, dann müssen zwischen den Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren einer Teilchensorte die Vertauschungsrelationen

$$\left[\hat{a}(\vec{p}, s), \hat{a}^\dagger(\vec{q}, s') \right]_{\mp} = \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{ss'} \quad (1.1.5)$$

$$\left[\hat{a}^\dagger(\vec{p}, s), \hat{a}^\dagger(\vec{q}, s') \right]_{\mp} = 0 \quad (1.1.6)$$

$$\left[\hat{a}(\vec{p}, s), \hat{a}(\vec{q}, s') \right]_{\mp} = 0 \quad (1.1.7)$$

gelten. Das positive Vorzeichen gilt dabei für Fermionen (Teilchen mit halbzahligem Gesamt-Spin) und das negative Vorzeichen für Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Gesamt-Spin).

Die Darstellung im Minkowski-Raum gelingt nun durch Übergang zu Feldoperatoren, die aus den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aufgebaut werden. So führt man zum Beispiel in der Quanten-Elektrodynamik für Fermionen mit dem Spin $\sigma = \pm 1/2$ den Spinor-Feldoperator

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{\sigma} \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2p^0}} \left(e^{-ipx} u(\vec{p}, \sigma) \hat{a}(\vec{p}, \sigma) + e^{ipx} v(\vec{p}, \sigma) \hat{a}_c^\dagger(\vec{p}, \sigma) \right) d^3p$$

und für die masselosen Photonen mit Spin $\lambda = \pm 1$ den Maxwell-Feldoperator

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2q^0}} \left(e^{-iqx} e^\mu(\vec{q}, \lambda) \hat{a}(\vec{q}, \lambda) + e^{iqx} e^{\mu*}(\vec{q}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\vec{q}, \lambda) \right) d^3q$$

ein, aus denen dann formal Lagrange-Skalare aufgebaut werden. Die auftretenden Polarisationsspinoren $u(\vec{p}, \sigma)$ und Polarisationsvektoren $e^\mu(\vec{q}, \lambda)$ müssen dabei eindeutig definiert und zudem Lorentz-invariant normiert sein. Für Details hierzu siehe [End09].

Weiter muss als Beispiel der Polarisationsspinor $u(\vec{p}, \sigma)$ im Ruhesystem ein Eigenvektor der z-Komponente des zugehörigen Spinoperators

$$S_z \cdot u(0, \sigma) = \sigma \cdot u(0, \sigma) \quad (1.1.8)$$

sein, da dieser die Einstellung des Spins misst. Mit

$$S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1.9)$$

ist die Zuordnung

$$u \left(0, +\frac{1}{2} \right) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u \left(0, -\frac{1}{2} \right) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.10)$$

üblich. Ist nun ω_p der Parametersatz einer speziellen Lorentz-Transformation, die ein Teilchen vom Ruhezustand in einen Zustand mit beliebigem Impuls \vec{p} transformiert

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \Lambda(\omega_p) \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (1.1.11)$$

so sind die Spinoren $u(\vec{p}, \sigma)$ für einen beliebigen Impuls durch die einheitliche Beziehung

$$u(\vec{p}, \sigma) = \Sigma(\omega_p) u(0, \sigma) \quad (1.1.12)$$

mit einer spinoriellen Lorentz-Transformation aus dem Ruhesystem definierbar, da unter Ausnutzung von $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ gezeigt werden kann, dass die

Normierung

$$\begin{aligned} u^\dagger(\vec{p}, \sigma) \gamma^0 u(\vec{p}, \sigma) &= u(0, \sigma) \Sigma^\dagger(\omega_p) \gamma^0 \Sigma(\omega_p) u(0, \sigma) \\ &= u(0, \sigma) \gamma^0 \Sigma^{-1}(\omega_p) \Sigma(\omega_p) u(0, \sigma) = u(0, \sigma) \gamma^0 u(0, \sigma) \quad , \end{aligned}$$

Lorentz-invariant ist.

Die Polarisationsvektoren $e^\mu(\vec{k}, \lambda)$ des Feldoperators der Photonen können nicht aus einem Ruhesystem definiert werden, da sich masselose Teilchen in allen Inertialsystemen mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Deshalb führt man in diesem Fall ein Referenzsystem ein, in welchem sich das Teilchen entlang der z -Achse bewegt und der Teilchenzustand durch $(k^\mu) = (k, 0, 0, k)^T$ gegeben ist. In diesem speziellen System fordert man dann, dass der Polarisationsvektor ein Eigenvektor der z -Komponente des Spinoperators

$$S_z \cdot e(\vec{k}, \lambda) = \lambda \cdot e(\vec{k}, \lambda) \quad (1.1.13)$$

ist. Mit dem zugehörigen Spinoperator

$$S_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.14)$$

kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit dann die Zuordnung

$$(e^\mu(\vec{k}, -1)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (e^\mu(\vec{k}, +1)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.15)$$

treffen. Die Polarisationsvektoren sind also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung

$$k_\mu e^\mu(\vec{k}, \lambda) = 0 \quad . \quad (1.1.16)$$

Ist nun ω_q der Parametersatz einer weiteren speziellen Lorentz-Transformation $\Lambda(\omega_q)$, die erst dem masselosen Teilchen durch einen Boost in z -Richtung den Impulsbetrag $q^0 = |\vec{q}|$ gibt und anschließend durch eine rein räumliche Drehung die Bewegung des Teilchens in die \vec{q} -Richtung bringt

$$\begin{pmatrix} q^0 \\ \vec{q} \end{pmatrix} = \Lambda(\omega_q) \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \quad , \quad (1.1.17)$$

so sind die Polarisationsvektoren für einen beliebigen Impuls durch die einheitliche Beziehung

$$e^\mu(\vec{q}, \lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu(\omega_q) e^\nu(\vec{k}, \lambda) \quad (1.1.18)$$

definierbar. Man beachte, dass es sich bei der vorstehenden Beziehung nicht um eine Lorentz-Transformation zwischen zwei Inertialsystemen handelt, sondern um die Definition der Polarisationsvektoren in einem einzigen Minkowski-Raum. Mit dieser Definition folgt

$$e_\mu^*(\vec{q}, \lambda) e^\mu(\vec{q}, \lambda) = e_\mu^*(\vec{k}, \lambda) e^\mu(\vec{k}, \lambda) \quad (1.1.19)$$

$$q_\mu e^\mu(\vec{q}, \lambda) = 0 \quad . \quad (1.1.20)$$

Der Maxwell-Feldoperator ist trotz des scheinbaren Lorentz-Index kein echter Vierervektor. Die Konsequenzen hieraus werden in dem nächsten Abschnitt diskutiert.

1.2 Konsequenzen der Lorentz-Invarianz

In diesem Abschnitt wird für den Zustandsvektor statt $|\eta; m, (\vec{p}, s)\rangle$ abkürzend einfach $|\vec{q}, \lambda\rangle$ geschrieben, da hier nur Photonen betrachtet werden und damit die Teilchensorte eindeutig festliegt. Die spezielle Lorentz-Transformation mit dem Parametersatz ω_q wurde durch die Forderung

$$q^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\omega_q) k^\nu \quad (1.2.1)$$

definiert. Dann kann man konsistent für die Zustandsvektoren im abstrakten Hilbert-Raum ebenfalls

$$|\vec{q}, \lambda\rangle = \hat{U}(\omega_q) |\vec{k}, \lambda\rangle \quad (1.2.2)$$

festlegen, wobei $\hat{U}(\omega)$ für den entsprechenden unitären Operator

$$\hat{U}(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}} \quad (1.2.3)$$

der Lorentz-Transformation im Hilbert-Raum steht. Hiermit wird gleichzeitig die Bedeutung der Polarisation in Zuständen mit einem beliebigen Impuls \vec{q} mit der Polarisation im Zustand mit dem Impuls \vec{k} identifiziert. Dies setzt obige Konvention für die Wahl des Standard-Parametersatzes ω_q voraus.

Die Konsistenz von (1.2.2) kann man leicht überprüfen:

$$\begin{aligned}
 \hat{P}^\mu |\vec{q}, \lambda\rangle &= \hat{U}(\omega_q) \hat{U}^{-1}(\omega_q) \hat{P}^\mu \hat{U}(\omega_q) |\vec{k}, \lambda\rangle \\
 &= \hat{U}(\omega_q) \hat{U}^{-1}(\omega_q) \hat{P}^\mu \hat{U}(\omega_q) |\vec{k}, \lambda\rangle \\
 &= \hat{U}(\omega_q) \Lambda^\mu{}_\nu(\omega_q) \hat{P}^\nu |\vec{k}, \lambda\rangle \\
 &= \hat{U}(\omega_q) \Lambda^\mu{}_\nu(\omega_q) k^\nu |\vec{k}, \lambda\rangle \\
 &= \Lambda^\mu{}_\nu(\omega_q) k^\nu \hat{U}(\omega_q) |\vec{k}, \lambda\rangle \\
 &= q^\mu |\vec{q}, \lambda\rangle
 \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Man kann nun jede beliebige Lorentz-Transformation eines masselosen Teilchens im Impulsraum in vier aufeinander folgende Lorentz-Transformationen

$$\Lambda(\omega) \cdot q = \Lambda(\omega_{\Lambda q}) \cdot S(\alpha, \beta) \cdot R(\theta) \cdot \Lambda^{-1}(\omega_q) \cdot q \tag{1.2.5}$$

aufteilen, wobei wegen $S_z = L^{12}$ (für eine explizite Matrixdarstellung der Erzeugenden $L^{\mu\nu}$ der Lorentz-Transformation siehe [End09])

$$R(\theta) = e^{-i\theta L^{12}} = e^{-i\theta S_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.6}$$

eine rein räumliche Drehung um die z -Achse ist. Der verbleibende Faktor

$$S(\alpha, \beta) = e^{-i(\alpha A + \beta B)} \tag{1.2.7}$$

wird durch die beiden Generator-Matrizen

$$\begin{aligned}
 A &= L^{01} - L^{31} & B &= L^{02} + L^{23} \\
 &= i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

bestimmt. Wegen

$$A^n = B^n = 0 \quad \text{für } n \geq 3 \quad \text{owie} \quad [A, B] = 0 \tag{1.2.9}$$

erhält man die explizite Darstellung

$$\begin{aligned}
 S(\alpha, \beta) &= 1_{4 \times 4} - i\alpha A - i\beta B - \frac{1}{2}(\alpha^2 A^2 + \beta^2 B^2) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 + \gamma & \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \gamma & \alpha & \beta & 1 - \gamma \end{pmatrix} \quad \text{mit } \gamma = (\alpha^2 + \beta^2)/2 \quad . \quad (1.2.10)
 \end{aligned}$$

Damit ist die Wirkung der Lorentz-Transformation für die Vektordarstellung abgeleitet. Insbesondere wird im Referenzsystem (k^μ) invariant gelassen; d.h. es gilt

$$R^\mu{}_\nu(\theta) k^\nu = k^\mu \quad (1.2.11)$$

$$S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta) k^\nu = k^\mu \quad . \quad (1.2.12)$$

Hiermit ist es nun möglich die Aufteilung (1.2.5) der Lorentz-Transformation zu verifizieren:

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\omega) \cdot q &= \Lambda(\omega_{\Lambda q}) \cdot S(\alpha, \beta) \cdot R(\theta) \cdot \Lambda^{-1}(\omega_q) \cdot q \\
 &= \Lambda(\omega_{\Lambda q}) \cdot S(\alpha, \beta) \cdot R(\theta) \cdot (k^\mu) \\
 &= \Lambda(\omega_{\Lambda q}) \cdot (k^\mu) \\
 &= \Lambda q
 \end{aligned}$$

Weiter wird

$$\begin{aligned}
 R(\theta)e(\vec{k}, \pm 1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \mp i \sin \theta \\ \sin \theta \pm i \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= e^{\mp i\theta} e(\vec{k}, \pm 1) \quad (1.2.13)
 \end{aligned}$$

bzw. in äquivalenter Formulierung

$$R(\theta)e(\vec{k}, \lambda) = e^{-i\lambda\theta} e(\vec{k}, \lambda) \quad . \quad (1.2.14)$$

Ganz analog ergibt sich

$$\begin{aligned}
 S(\alpha, \beta) e(\vec{k}, \lambda) &= \begin{pmatrix} 1 + \gamma & \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \gamma & \alpha & \beta & 1 - \gamma \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ i\lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + i\lambda\beta \\ +1 \\ i\lambda \\ \alpha + i\lambda\beta \end{pmatrix} \\
 &= e(\vec{k}, \lambda) + \frac{\alpha + i\lambda\beta}{\sqrt{2}k} \cdot (k^\mu) \\
 &= e(\vec{k}, \lambda) + f(\alpha, \beta, \lambda, k) \cdot (k^\mu) \quad . \quad (1.2.15)
 \end{aligned}$$

Damit folgt für die allgemeinen Polarisationsvektoren bei einer beliebigen Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\omega) e(\vec{q}, \lambda) &= \Lambda(\omega_{\Lambda q}) \cdot S(\alpha, \beta) \cdot R(\theta) \cdot \Lambda^{-1}(\omega_q) e(\vec{q}, \lambda) \\
 &= \Lambda(\omega_{\Lambda q}) \cdot S(\alpha, \beta) \cdot R(\theta) e(\vec{k}, \lambda) \\
 &= e^{-i\lambda\theta} \Lambda(\omega_{\Lambda q}) \cdot S(\alpha, \beta) e(\vec{k}, \lambda) \\
 &= e^{-i\lambda\theta} \Lambda(\omega_{\Lambda q}) \left(e(\vec{k}, \lambda) + f(\alpha, \beta, \lambda, k) \cdot (k^\mu) \right) \\
 &= e^{-i\lambda\theta} \left(e(\vec{\Lambda}q, \lambda) + f(\alpha, \beta, \lambda, k) \cdot \Lambda q \right) \quad . \quad (1.2.16)
 \end{aligned}$$

Die analogen Überlegungen sind nun auch für den abstrakten Hilbert-Raum durchzuführen. Für den Zustandsvektor im Referenzsystem erhält man

$$\hat{R}(\theta) |\vec{k}, \lambda\rangle = e^{-i\theta \hat{S}_z} |\vec{k}, \lambda\rangle = e^{-i\lambda\theta} |\vec{k}, \lambda\rangle \quad . \quad (1.2.17)$$

Die Generatoren \hat{A} und \hat{B} vertauschen miteinander, aber nicht mit dem Spin-Operator \hat{S}_z . Danach könnte ein masseloses Teilchen im Prinzip auch statt durch die Eigenwerte ($m = 0, s = 1, \lambda = \pm 1$) durch den anderen Satz von Eigenwerten ($m = 0, s = 1, a, b$) charakterisierbar sein. Dies ist in der Natur so aber nicht realisiert. Für die Photon-Zustände muss nun

$$\hat{A} |\vec{k}, \lambda\rangle = \hat{B} |\vec{k}, \lambda\rangle = 0 \quad (1.2.18)$$

sein, damit korrespondierend zu (1.2.12) auch im Hilbert-Raum für beliebiges α und β

$$\hat{S}(\alpha, \beta) |\vec{k}, \lambda\rangle = e^{-i(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B})} |\vec{k}, \lambda\rangle = |\vec{k}, \lambda\rangle \quad (1.2.19)$$

gilt. Für einen allgemeinen Zustandsvektor ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
 \hat{U}(\omega) |\vec{q}, \lambda\rangle &= \hat{U}(\omega_{\Lambda q}) \cdot \hat{S}(\alpha, \beta) \cdot \hat{R}(\theta) \cdot \hat{U}^{-1}(\omega_q) \quad |\vec{q}, \lambda\rangle \\
 &= \hat{U}(\omega_{\Lambda q}) \cdot \hat{S}(\alpha, \beta) \cdot \hat{R}(\theta) \quad |\vec{k}, \lambda\rangle \\
 &= e^{-i\lambda\theta} \hat{U}(\omega_{\Lambda q}) \quad |\vec{k}, \lambda\rangle \\
 &= e^{-i\lambda\theta} |\vec{\Lambda q}, \lambda\rangle \quad .
 \end{aligned} \tag{1.2.20}$$

Für die Erzeugungsoperatoren bedeutet dies

$$\hat{U}(\omega) \hat{a}^\dagger(\vec{q}, \lambda) \hat{U}^{-1}(\omega) = e^{-i\lambda\theta} \hat{a}^\dagger(\vec{\Lambda q}, \lambda) \tag{1.2.21}$$

bzw. unter Ausnutzung der Tatsache, dass der Transformationsoperator unitär, d.h. $\hat{U}^\dagger(\omega) = \hat{U}^{-1}(\omega)$ ist, bedeutet dies nach adjungieren für die Vernichtungsoperatoren

$$\hat{U}(\omega) \hat{a}(\vec{q}, \lambda) \hat{U}^{-1}(\omega) = e^{+i\lambda\theta} \hat{a}(\vec{\Lambda q}, \lambda) \quad . \tag{1.2.22}$$

Der Phasenwinkel ist dabei natürlich eine Funktion der Parameter der Lorentz-Transformation und des Impulses $\theta = \theta(\omega, \vec{q})$.

Mit diesen Vorüberlegungen kann man nun die Lorentz-Transformation

$$\hat{U}(\omega) \hat{A}^\mu(x) \hat{U}^{-1}(\omega) \tag{1.2.23}$$

des Maxwell-Feldoperators ermitteln. Der Maxwell-Feldoperator besteht im Integral aus zwei Termen, die hermitesch konjugiert zueinander sind. Für den ersten dieser beiden Terme

$$\int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2q^0}} e^{-iqx} \cdot e^\mu(\vec{q}, \lambda) \cdot \hat{U}(\omega) \hat{a}(\vec{q}, \lambda) \hat{U}^{-1}(\omega) \cdot d^3q$$

rechnet man unter Ausnutzung von (1.2.16) und (1.2.22)

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2q^0}} e^{-iqx} \cdot e^{-i\lambda\theta} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \left(e^\nu(\vec{\Lambda q}, \lambda) + f(\alpha, \beta, \lambda, k) (\Lambda q)^\nu \right) \\
 &\quad \cdot e^{+i\lambda\theta} \hat{a}(\vec{\Lambda q}, \lambda) \cdot d^3q \\
 &= \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2q^0}} e^{-iqx} \cdot (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu e^\nu(\vec{\Lambda q}, \lambda) \cdot \hat{a}(\vec{\Lambda q}, \lambda) \cdot d^3q \\
 &\quad + \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2q^0}} e^{-iqx} \cdot f(\alpha, \beta, \lambda, k) q^\mu \cdot \hat{a}(\vec{\Lambda q}, \lambda) \cdot d^3q
 \end{aligned}$$

sowie wegen $qx = \Lambda q \Lambda x$, $\frac{d^3 q}{\sqrt{2q^0}} = \frac{d^3 \Lambda q}{\sqrt{2(\Lambda q)^0}}$ und $q^\mu e^{-iqx} = i \partial^\mu e^{-iqx}$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2(\Lambda q)^0}} e^{-i\Lambda q \Lambda x} \cdot (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu e^\nu(\vec{\Lambda}q, \lambda) \cdot \hat{a}(\vec{\Lambda}q, \lambda) \cdot d^3 \Lambda q \\
&\quad + \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2q^0}} \cdot i (\partial^\mu e^{-iqx}) \cdot f(\alpha, \beta, \lambda, k) \cdot \hat{a}(\vec{\Lambda}q, \lambda) \cdot d^3 q
\end{aligned}$$

bzw. nach kurzer Umformung und Umbenennung Λq zu q im ersten Integral

$$\begin{aligned}
&= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2q^0}} e^{-iq\Lambda x} \cdot e^\nu(\vec{q}, \lambda) \cdot \hat{a}(\vec{q}, \lambda) \cdot d^3 q \\
&\quad + \partial^\mu \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2q^0}} \cdot i e^{-iqx} \cdot f(\alpha, \beta, \lambda, k) \cdot \hat{a}(\vec{\Lambda}q, \lambda) \cdot d^3 q \quad .
\end{aligned}$$

Der zweite sich ergebende Term ist hermitesch konjugiert hierzu, so dass sich unter Berücksichtigung beider Terme und der Summenbildung über die zwei Polarisationen

$$\hat{U}(\omega) \hat{A}^\mu(x) \hat{U}^{-1}(\omega) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \hat{A}^\nu(\Lambda x) + \partial^\mu \hat{f}(x) \quad (1.2.24)$$

ergibt, wobei $\hat{f}(x)$ ein Integralterm ist, in welchen die Parameter der Lorentz-Transformation sowie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eingehen. Die genaue Form dieses Terms ist an dieser Stelle jedoch nicht weiter wichtig. Hiermit ist nun gezeigt, dass der Maxwell-Feldoperator kein echter Vierervektor ist. Damit ein formal Lorentz-invariant aussehender Lagrange-Skalar auch tatsächlich Lorentz-invariant ist, muss er zusätzlich invariant unter der Eichtransformation

$$\hat{A}^\mu(x) \longrightarrow \hat{A}^\mu(x) + \partial^\mu \hat{f}(x) \quad (1.2.25)$$

sein. Die Eichinvarianz einer Theorie mit masselosen Spin-1 Teilchen ist keine unabhängige Eigenschaft, sondern eine Konsequenz der Forderung nach Lorentz-Invarianz und damit auch keine Symmetrie im physikalischen Sinne. Sie hat keine Auswirkungen im abstrakten Hilbert-Raum auf die Teilchenzustände. Äquivalent kann man die Eichinvarianz auch mit Hilfe der Polarisationsvektoren durch die Forderung nach Invarianz der Theorie bei der Transformation

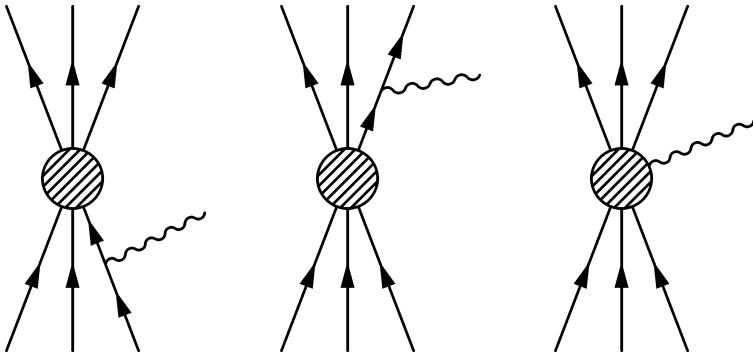
$$e^\mu(\vec{q}, \lambda) \longrightarrow e^\mu(\vec{q}, \lambda) + c q^\mu \quad (1.2.26)$$

ausdrücken, in der c für eine beliebige komplexe Zahl steht.

1.3 Die Ladungserhaltung

Es soll nun die Emission eines Photons mit sehr niedriger Energie q^0 für einen Prozess betrachtet werden, der N einlaufende und M auslaufende Teilchen mit Masse besitzt. Im Grenzübergang $q \rightarrow 0$ wird von einem weichen Photon gesprochen. Das weiche Photon kann dann von einem der einlaufenden Teilchen, von einem der auslaufenden Teilchen oder von einem virtuellen Teilchen, das im Inneren des Feynman-Diagramms auftritt, emittiert werden:

Feynman-Diagramme für die Emission eines weichen Photons



Möglichkeit a

Möglichkeit b

Möglichkeit c

Dann ist die Feynman-Amplitude für die Emission eines Photons

$$\mathcal{M} = \sum_n \mathcal{M}_a^n + \sum_m \mathcal{M}_b^m + \mathcal{M}_c \quad , \quad (1.3.1)$$

wobei \mathcal{M}_a^n die Feynman-Amplitude für den Prozess ist, bei dem das n -te einlaufende Teilchen das Photon emittiert, \mathcal{M}_b^m die Feynman-Amplitude für den Prozess ist, bei dem das m -te auslaufende Teilchen das Photon emittiert, und \mathcal{M}_c die Feynman-Amplitude für den Prozess ist, bei dem die Emission des Photons an einer der inneren Linien des Feynman-Diagramms stattfindet. Beschränkt man sich in einem ersten Schritt bei den ein- und auslaufenden Teilchen auf skalare Teilchen, sind die für das Folgende relevanten Feynman-Regeln:

- Jede äußere Skalarlinie liefert den Faktor 1
- Jedes auslaufende Photon liefert den Faktor $e^{\mu*}(\vec{q}, \lambda)$

- Jede innere Skalarlinie liefert einen Faktor $i/(p^2 - m^2)$
- Jeder Skalar-Photon-Vertex liefert den Faktor $-iQ(p_\mu + p'_\mu)$

Bezeichnet weiter \mathcal{M}_0 den Prozess, wenn kein Photon emittiert wird, und $M(p, q)$ die Emission eines Photons mit dem Impuls q von einem Teilchen mit dem Anfangsimpuls p , so wird für den Prozess mit der Emission eines weichen Photons

$$\mathcal{M} = \sum_n \mathcal{M}_0 \cdot M(p_n, q) + \sum_m \mathcal{M}_0 \cdot M(p_m + q, q) + \mathcal{M}_c \quad , \quad (1.3.2)$$

wobei in den beiden Summen wegen dem betrachteten Grenzfall $q \rightarrow 0$ die Feynman-Amplitude \mathcal{M}_0 stehen darf. Aus den Feynman-Regeln ergibt sich mit $p^2 = m$ und wegen $q \rightarrow 0$ für die Emission eines weichen Photons durch ein einlaufendes Teilchen

$$\begin{aligned} M(p, q) &= 1 \cdot \left(-iQ (p_\mu + (p_\mu - q)) \right) \cdot e^{\mu*}(\vec{q}, \lambda) \cdot \frac{i}{(p - q)^2 - m^2} \\ &= -\frac{2Q p_\mu e^{\mu*}(\vec{q}, \lambda)}{p^2 - 2p \cdot q - m^2} \\ &= -\frac{Q p_\mu e^{\mu*}(\vec{q}, \lambda)}{p \cdot q} \quad , \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

für die Emission durch ein auslaufendes Teilchen

$$\begin{aligned} M(p + q, q) &= \frac{i}{(p + q)^2 - m^2} \cdot \left(-iQ ((p_\mu + q) + p_\mu) \right) \cdot e^{\mu*}(\vec{q}, \lambda) \cdot 1 \\ &= +\frac{2Q p_\mu e^{\mu*}(\vec{q}, \lambda)}{p^2 + 2p \cdot q - m^2} \\ &= +\frac{Q p_\mu e^{\mu*}(\vec{q}, \lambda)}{p \cdot q} \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

und, da die Feynman-Amplituden Lorentz-Skalare sind, muss

$$\mathcal{M}_c = M_\mu e^{\mu*}(\vec{q}, \lambda) \quad (1.3.5)$$

gelten. Dies alles eingesetzt führt zu

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \left(-\sum_n \frac{Q_n p_{n\mu} e^{\mu*}(\vec{q}, \lambda)}{p_n \cdot q} + \sum_m \frac{Q_m p_{m\mu} e^{\mu*}(\vec{q}, \lambda)}{p_m \cdot q} \right) + M_\mu e^{\mu*}(\vec{q}, \lambda). \quad (1.3.6)$$

Es lässt sich zeigen, dass sich für einlaufende bzw. auslaufende Teilchen mit Masse und beliebigem Spin die gleiche Feynman-Amplitude ergibt. Lorentz-Invarianz erzwingt nun für jeden physikalischen Prozess, und damit auch für die Feynman-Amplitude, Invarianz unter der Eichtransformation

$$e^\mu(\vec{q}, \lambda) \longrightarrow e^\mu(\vec{q}, \lambda) + c q^\mu \quad (1.3.7)$$

des Polarisationsvektors. Dies auf die vorherige Beziehung angewendet, führt zu der Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{M}_0 \left(- \sum_n \frac{Q_n p_{n\mu} c^* q^\mu}{p_n \cdot q} + \sum_m \frac{Q_m p_{m\mu} c^* q^\mu}{p_m \cdot q} \right) + M_\mu c^* q^\mu \\ &= c^* \mathcal{M}_0 \left(- \sum_n Q_n + \sum_m Q_m \right) + c^* M_\mu q^\mu \quad . \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Für den Term M_μ kann man sich Überlegen, dass beim Übergang zu weichen Photonen kein Pol entsteht. Dies liegt darin begründet, dass der Impuls im einzufügenden Propagator eines virtuellen Teilchens im Gegensatz zu dem Impuls im Propagator eines ein- oder eines auslaufenden Teilchens nicht auf der Massenschale liegt. Da Divergenzen ausschließlich von Propagatoren und nicht von Vertices kommen können, divergiert der Term nicht. Als Konsequenz folgt

$$M_\mu q^\mu \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad q \rightarrow 0 \quad . \quad (1.3.9)$$

Damit sind nur solche Prozesse physikalisch möglich, die die Bedingung

$$\sum_m Q_m = \sum_n Q_n \quad (1.3.10)$$

erfüllen. Dies ist aber nichts anderes als die Tatsache, dass bei jedem Streuprozess die elektrische Ladung erhalten bleibt. Diese ist somit eine Konsequenz aus der notwendigen Eichinvarianz des Maxwell-Feldoperators in der relativistischen Quantenfeldtheorie.

Die Eichinvarianz ist aber keine Symmetrie im physikalischen Sinne. Sie hat keine Auswirkungen auf die Zustände des Photons im Hilbert-Raum, sondern zeigt die Redundanz in der Beschreibung eines masselosen Teilchens durch einen Feldoperator. Da die Zustände im Hilbert-Raum sich bei der Eichtransformation nicht ändern, müssen die durch eine Eichtransformation verbundenen Feldkonfigurationen physikalisch äquivalent sein.

1.4 Das Äquivalenzprinzip

Die Überlegungen für das masselose Spin-1 Teilchen lassen sich ohne große Modifikationen auf masselose Spin-2 Teilchen übertragen. Der Spin von masselosen Spin-2 Teilchen kann wie bei Spin-1 Teilchen in z -Richtung nur zwei Werte annehmen, in diesem Fall die beiden Werte $h = \pm 2$. Zum Aufbau eines Lorentz-invarianten Lagrange-Skalars führt man auch hier einen Feldoperator

$$\hat{h}^{\mu\nu}(x) = \sum_h \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2q^0}} \left(e^{-iqx} e^{\mu\nu}(\vec{q}, h) \hat{a}(\vec{q}, h) + e^{iqx} e^{\mu\nu*}(\vec{q}, h) \hat{a}^\dagger(\vec{q}, h) \right) d^3q$$

ein, erzeugt die Polarisationsmatrizen wiederum aus einem Referenzsystem

$$e^{\mu\nu}(\vec{q}, h) = \Lambda^\mu{}_\rho(\omega_q) \Lambda^\nu{}_\sigma(\omega_q) e^{\rho\sigma}(\vec{k}, h) \quad (1.4.1)$$

und definiert sie in diesem Referenzsystem mit Hilfe der Polarisationsvektoren

$$\begin{aligned} e^{\rho\sigma}(\vec{k}, \pm 2) &= e^\rho(\vec{k}, \pm 1) e^\sigma(\vec{k}, \pm 1) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & \pm i & 0 \\ 0 & \pm i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Dass hierdurch tatsächlich ein Spin-2 Teilchen beschrieben wird, sieht man durch Ausnutzung von (1.2.14):

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}(\theta) e^{\rho\sigma}(\vec{k}, 2\lambda) &= R^\mu{}_\rho(\theta) R^\nu{}_\sigma(\theta) e^\rho(\vec{k}, \lambda) e^\sigma(\vec{k}, \lambda) \\ &= R^\mu{}_\rho(\theta) e^\rho(\vec{k}, \lambda) \cdot R^\nu{}_\sigma(\theta) e^\sigma(\vec{k}, \lambda) \\ &= e^{-i\lambda\theta} e^\rho(\vec{k}, \lambda) \cdot e^{-i\lambda\theta} e^\sigma(\vec{k}, \lambda) \\ &= e^{-i2\lambda\theta} e^{\rho\sigma}(\vec{k}, 2\lambda) \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Die Eigenschaften der Polarisationsvektoren übertragen sich entsprechend der Definition auf die Polarisationsmatrizen

$$q_\nu e^{\mu\nu}(\vec{q}, h) = 0 \quad \text{sowie} \quad q_\mu e^{\mu\nu}(\vec{q}, h) = 0 \quad . \quad (1.4.4)$$

Zudem gelten die Beziehungen

$$e^{\mu\nu}(\vec{q}, h) = e^{\nu\mu}(\vec{q}, h) \quad \text{sowie} \quad \eta_{\mu\nu} e^{\mu\nu}(\vec{q}, h) = 0 \quad . \quad (1.4.5)$$

Erstere ist eine Konsequenz der symmetrischen Definition der Polarisationsmatrizen, während die zweite Beziehung durch Ausnutzung der Invarianz des Metrikensors $\eta_{\mu\nu}$ bei Lorentz-Transformationen gezeigt werden kann:

$$\begin{aligned}
 \eta_{\mu\nu} e^{\mu\nu}(\vec{q}, h) &= \left(\Lambda_{\mu}{}^{\kappa}(\omega_q) \Lambda_{\nu}{}^{\tau}(\omega_q) \eta_{\kappa\tau} \right) \left(\Lambda^{\mu}{}_{\rho}(\omega_q) \Lambda^{\nu}{}_{\sigma}(\omega_q) e^{\rho\sigma}(\vec{k}, h) \right) \\
 &= \eta_{\kappa\tau} \delta_{\rho}^{\kappa} \delta_{\sigma}^{\tau} e^{\rho\sigma}(\vec{k}, h) \\
 &= \eta_{\rho\sigma} e^{\rho\sigma}(\vec{k}, h) \\
 &= \eta_{11} - \eta_{22} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Hiermit sind auch die wesentlichen Eigenschaften des Feldoperators festgelegt:

$$\hat{h}^{\mu\nu}(x) = \hat{h}^{\nu\mu}(x) \tag{1.4.7}$$

$$\partial_{\mu} \hat{h}^{\mu\nu}(x) = 0 \tag{1.4.8}$$

$$\eta_{\mu\nu} \hat{h}^{\mu\nu}(x) = 0 \tag{1.4.9}$$

Der so definierte Feldoperator $\hat{h}^{\mu\nu}(x)$ ist kein echter Tensor. Aus (1.2.16) ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned}
 \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} e^{\rho\sigma}(\vec{q}, 2\lambda) &= e^{-i2\lambda\theta} \left(e^{\mu}(\vec{\Lambda}q, \lambda) + f \cdot (\Lambda q)^{\mu} \right) \left(e^{\nu}(\vec{\Lambda}q, \lambda) + f \cdot (\Lambda q)^{\nu} \right) \\
 &= e^{-i2\lambda\theta} \left(e^{\mu\nu}(\vec{\Lambda}q, 2\lambda) + \xi^{\nu} \cdot (\Lambda q)^{\mu} + \xi^{\mu} \cdot (\Lambda q)^{\nu} \right)
 \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

mit
$$\xi^{\mu} = f \cdot e^{\mu}(\vec{\Lambda}q, \lambda) + \frac{1}{2} f^2 \cdot (\Lambda q)^{\mu} \quad . \tag{1.4.11}$$

Für einen beliebigen Zustandsvektor gilt nun wiederum

$$\hat{U}(\omega) |\vec{q}, h\rangle = e^{-ih\theta} |\vec{\Lambda}q, h\rangle \quad . \tag{1.4.12}$$

Eine vollständig analoge Diskussion wie beim Spin-1 Teilchen zeigt, dass ein rein formal Lorentz-invarianter Lagrange-Skalar eines Spin-2 Teilchens auch tatsächlich Lorentz-invariant ist, wenn er zusätzlich invariant unter der Eichtransformation

$$\hat{h}^{\mu\nu}(x) \longrightarrow \hat{h}^{\mu\nu}(x) + \partial^{\mu} \hat{\xi}^{\nu} + \partial^{\nu} \hat{\xi}^{\mu} \tag{1.4.13}$$

ist. Auf der Ebene der Polarisationsmatrizen ist die Eichtransformation

$$e^{\mu\nu}(\vec{q}, h) \longrightarrow e^{\mu\nu}(\vec{q}, h) + c^{\nu} q^{\mu} + c^{\mu} q^{\nu} \tag{1.4.14}$$

mit Hilfe eines beliebigen Vierervektors c^{μ} formulierbar.

Für die Berechnung der Feynman-Amplitude der Emission eines Spin-2 Teilchens benötigt man die zusätzlichen Feynman-Regeln:

- Jedes auslaufende Spin-2 Teilchen liefert den Faktor $e^{\mu\nu*}(\vec{q}, \lambda)$
- Jeder Skalar-Spin-2 Vertex liefert den Faktor $\tau_{1;\mu\nu}(p, p', m)$

Dabei ist der Vertexfaktor durch den Ausdruck (siehe hierzu (4.4.2))

$$\tau_{1;\mu\nu}(p, p', m) = -i \frac{\kappa}{2} \left((p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu) - \eta_{\mu\nu} (p \cdot p' - m^2) \right) \quad (1.4.15)$$

gegeben, der sich für weiche Spin-2 Teilchen im Grenzübergang $q \rightarrow 0$ zu

$$\tau_{1;\mu\nu}(p, p, m) = -i\kappa p_\mu p_\nu \quad (1.4.16)$$

vereinfacht. Der Vertexfaktor für den Skalar-Photon-Vertex war im Grenzübergang $q \rightarrow 0$ durch $-i2Qp_\mu$ gegeben. Die Feynman-Amplitude für die Emission eines weichen Spin-2 Teilchens erhält man deshalb aus (1.3.6), indem man einfach die Vertexfaktoren austauscht:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \left(- \sum_n \frac{\kappa_n p_{n\mu} p_{n\nu} e^{\mu\nu*}(\vec{q}, h)}{2p_n \cdot q} + \sum_m \frac{\kappa_m p_{m\mu} p_{m\nu} e^{\mu\nu*}(\vec{q}, h)}{2p_m \cdot q} \right) \\ + M_{\mu\nu} e^{\mu\nu*}(\vec{q}, h) \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

Auch in diesen Fall ergibt sich für einlaufende bzw. auslaufende Teilchen mit Masse und beliebigem Spin die gleiche Feynman-Amplitude. Die Notwendigkeit der Eichinvarianz führt dann zu der Bedingung

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 \left(- \sum_n \frac{\kappa_n p_{n\mu} p_{n\nu} (c^\nu q^\mu + c^\mu q^\nu)^*}{2p_n \cdot q} + \sum_m \frac{\kappa_m p_{m\mu} p_{m\nu} (c^\nu q^\mu + c^\mu q^\nu)^*}{2p_m \cdot q} \right) \\ + M_{\mu\nu} (c^\nu q^\mu + c^\mu q^\nu)^* = 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

Berücksichtigt man wiederum, dass im Grenzübergang $q \rightarrow 0$ der letzte Term verschwindet, erhält man nach kurzer Umformung schließlich die Bedingung

$$\sum_m \kappa_m p_{m\mu} = \sum_n \kappa_n p_{n\mu} \quad . \quad (1.4.19)$$

Die einzige erhaltene Größe bei einem nicht trivialem Streuprozess ist nun aber nur der Gesamtimpuls. Als Konsequenz muss für alle Teilchen

$$\kappa_m = \kappa_n = \kappa \quad (1.4.20)$$

gelten. Die Kopplungsstärke eines Spin-2 Teilchens zu allen anderen Teilchen ist identisch gleich κ . Dies ist aber nichts anderes als das Äquivalenzprinzip, da die verwendeten Vertices der Kopplung des Spin-2 Teilchens an den Energie-Impulsdichte-Tensor der anderen Teilchen entsprechen. Dies wird im nächsten Kapitel gezeigt werden. Das Äquivalenzprinzip ist damit letztlich eine Konsequenz der Forderung nach Lorentz-Invarianz, da diese zur Notwendigkeit der Eichinvarianz der Feldoperatoren und Polarisationsmatrizen geführt hat, aus welcher dann das Äquivalenzprinzip folgt.

1.5 Exkurs: Spin-s Felder

Die Überlegungen wie für das masselose Spin-1 und Spin-2 Teilchen lassen sich für masselose Teilchen mit höherem ganzzahligen Spin fortführen. Der Spin von masselosen Teilchen kann in z -Richtung nur zwei Werte annehmen, ein Spin- s Teilchen die beiden Werte $h = \pm s$. Der Feldoperator zum Aufbau eines Lorentz-invarianten Lagrange-Skalars ist dann

$$\hat{F}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}(x) = \sum_h \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2q^0}} \left(e^{-iqx} e^{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}(\vec{q}, h) \hat{a}(\vec{q}, h) + e^{iqx} e^{\mu_1\mu_2\dots\mu_s*}(\vec{q}, h) \hat{a}^\dagger(\vec{q}, h) \right) d^3q$$

mit den Polarisationsfaktoren

$$e^{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}(\vec{q}, h) = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1}(\omega_q) \Lambda^{\mu_2}_{\rho_2}(\omega_q) \dots \Lambda^{\mu_s}_{\rho_s}(\omega_q) e^{\rho_1\rho_2\dots\rho_s}(\vec{k}, h) \quad , \quad (1.5.1)$$

die im Referenzsystem wiederum mit Hilfe der Polarisationsvektoren

$$e^{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}(\vec{k}, \pm s) = e^{\mu_1}(\vec{k}, \pm 1) e^{\mu_2}(\vec{k}, \pm 1) \dots e^{\mu_s}(\vec{k}, \pm 1) \quad (1.5.2)$$

definiert werden. Die Polarisationsfaktoren erfüllen analog wie beim Spin-2 Teilchen die für das Folgende wichtige Beziehung

$$\eta_{\mu_a\mu_b} e^{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}(\vec{q}, h) = 0 \quad \text{mit} \quad a \neq b \in \{1, 2, \dots, s\} \quad . \quad (1.5.3)$$

Die Forderung nach Lorentz-Invarianz führt für die Feynman-Amplitude zur notwendigen Invarianz unter der Eichtransformation

$$e^{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}(\vec{q}, h) \quad \longrightarrow \quad e^{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}(\vec{q}, h) + c^{(\mu_1} q^{\mu_2\dots\mu_s)} \quad , \quad (1.5.4)$$

in welcher die Klammerung $(\mu_1\mu_2\dots\mu_s)$ die vollständige Symmetrisierung der Indizes bedeutet. Auf der Ebene des Lagrange-Skalars ist die Eichtransformation des Feldoperators durch den Übergang

$$\hat{F}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}(x) \quad \longrightarrow \quad \hat{F}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}(x) + \partial^{(\mu_1} \hat{\xi}^{\mu_2\dots\mu_s)}(x) \quad (1.5.5)$$

gegeben. Aufgrund der Lorentz-Invarianz kann der Skalar-Spin- s Vertexfaktor zur Berechnung der Feynman-Amplitude bei einem weichen Spin- s Teilchen nur die allgemeine Struktur

$$V_{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}(p,p) = -i\lambda p_{\mu_1}p_{\mu_2}\cdots p_{\mu_s} + \eta_{(\mu_1\mu_2}V'_{\mu_3\dots\mu_s)}(p,p) \quad (1.5.6)$$

besitzen. Wegen (1.5.3) verschwinden nun aber alle Kontraktionen des zweiten Terms mit den Polarisationsfaktoren. Damit ist der zur Berechnung der Feynman-Amplitude relevante Teil des Vertexfaktors

$$V_{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}(p,p)|_{\text{relevant}} = -i\lambda p_{\mu_1}p_{\mu_2}\cdots p_{\mu_s} \quad . \quad (1.5.7)$$

Es lässt sich wiederum zeigen, dass für einlaufende bzw. auslaufende Teilchen mit Masse und beliebigem Spin der gleiche relevante Vertexfaktor entsteht. Durch analoge Schritte wie beim weichen Spin-2 Teilchen ergibt sich damit das Weinberg low-energy Theorem

$$\sum_m \lambda_m p_{m\mu_1}p_{m\mu_2}\cdots p_{m\mu_{s-1}} = \sum_n \lambda_n p_{n\mu_1}p_{n\mu_2}\cdots p_{n\mu_{s-1}} \quad . \quad (1.5.8)$$

Die Fälle $s = 1, 2$ wurden bereits ausführlicher diskutiert und entsprechen der Ladungserhaltung bzw. dem Äquivalenzprinzip. Für $s \geq 3$ ist dieses Erhaltungsgesetz nur erfüllbar, wenn

$$\lambda_m = \lambda_n = 0 \quad (1.5.9)$$

gilt; d.h. keine Kopplung zum weichen Spin- s Teilchen stattfindet. Masselose Spin- s Teilchen können zwar existieren, aber bei niedrigen Energien keine minimale Kopplung zu sich selbst oder zu anderen Teilchen besitzen und damit keine langreichweitigen Kräfte beschreiben. Eine ausführlichere Diskussion dieses und weiterer no-go Theoreme findet sich in [Bol12].

Kapitel 2

Das Graviton-Feld

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass das masselose Spin-2 Teilchen mit dem Träger der gravitativen Wechselwirkung identifiziert werden kann. Durch Ausnutzung der notwendigen Eichinvarianz wird der Lagrange-Skalar des Spin-2 Feldes bestimmt. Um die Darstellung so übersichtlich wie möglich zu halten, werden die Überlegungen mit den klassischen kovariant formulierten Feldgrößen durchgeführt. Abschließend wird der Graviton-Propagator ermittelt.

2.1 Eigenschaften des Gravitons

Die Gravitation ist eine langreichweitige Kraft. Sie kann deshalb nur durch ein masseloses Boson vermittelt werden. Da sie zudem immer anziehend wirkt, sind nur die Spins $s = 0$ oder $s = 2$ möglich.

Beobachtungen haben gezeigt, dass die Gravitation auch auf Photonen wirkt. Wären die zugehörigen Gravitonen Spin-0 Teilchen, so könnte ein entsprechender Wechselwirkungsterm keine Lorentz-Indizes enthalten und die Wechselwirkung wäre dann nur über die Spur des Energie-Impulsdichte-Tensors der Photonen möglich, da die Gravitation an den Energieinhalt koppelt. Nun gilt

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{\text{em}} &= \eta^{\mu\nu} \left(\eta^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \\ &= F_{\mu\rho} F^{\mu\rho} - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Da die Spur verschwindet, kann die Gravitation nur durch ein Spin-2 Teilchen, dem sogenannten Graviton, repräsentiert werden.

2.2 Der Lagrange-Skalar des Maxwell-Feldes

Als Vorbereitung auf das Graviton-Feld soll zuerst der Lagrange-Skalar des Maxwell-Feldes abgeleitet werden. Da die Bewegungsgleichung des Maxwell-Feldes linear sein soll, darf der Lagrange-Skalar höchstens quadratisch in den Feldvariablen und ihren ersten Ableitungen sein. Der allgemeinste Lorentz-Skalar, der sich für das masselose Maxwell-Feld bilden lässt, ist dann

$$\begin{aligned} L_A &= \left(c_1 \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} + c_2 \eta_{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu} + c_3 \eta_{\rho\mu} \eta_{\sigma\nu} + c_4 \eta_{\rho\nu} \eta_{\sigma\mu} \right) \partial^\rho A^\sigma \partial^\mu A^\nu \\ &= c_1 \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \partial^\rho A^\sigma \partial^\mu A^\nu + c_2 (\partial_\mu A^\mu)^2 + c_3 \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + c_4 \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu \quad . \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \partial^\rho A^\sigma \partial^\mu A^\nu &= \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \partial^\rho A^\sigma \partial^\mu A^\nu + \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} A^\sigma \partial^\rho \partial^\mu A^\nu \\ &= \partial^\rho \left(\epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} A^\sigma \partial^\mu A^\nu \right) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

eine vollständige Divergenz, die die Bewegungsgleichung nicht beeinflussen kann. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann deshalb $c_1 = 0$ gesetzt werden. Führt man die Eichtransformation

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x) \quad (2.2.3)$$

durch und betrachtet nur die in $f(x)$ quadratischen Terme, so muss offenbar

$$c_2 (\partial_\mu \partial^\mu f)^2 + c_3 \partial_\mu \partial_\nu f \partial^\mu \partial^\nu f + c_4 \partial_\nu \partial_\mu f \partial^\mu \partial^\nu f = 0 \quad (2.2.4)$$

sein. Hieraus kann man für die Koeffizienten unmittelbar

$$c_2 = 0 \quad \text{und} \quad c_4 = -c_3 \quad (2.2.5)$$

ablesen. Damit verbleibt für den Lagrange-Skalar

$$\begin{aligned} L_A &= c_3 \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - c_3 \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu \\ &= c_3 \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right) \partial^\mu A^\nu \\ &= \frac{c_3}{2} \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right) \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right) \quad . \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Führt man den Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.2.7)$$

ein, so erhält man mit der üblicherweise gewählten Skalierung die gewohnte Form

$$L_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.2.8}$$

des Lagrange-Skalars des Maxwell-Feldes. Die Eichinvarianz ist in dieser Form auch unmittelbar einsichtig.

2.3 Der Lagrange-Skalar des Graviton-Feldes

Die Ableitung des Lagrange-Skalars für das Graviton-Feld ist algebraisch etwas komplizierter als für das Maxwell-Feld. Der mögliche Lagrange-Skalar für das masselose Graviton-Feld, der ein Lorentz-Skalar und höchsten quadratisch in den ersten Ableitungen der Feldvariablen ist, hat die allgemeine Struktur

$$L_h = \left(\sum_n c_n \eta_{\dots} \eta_{\dots} \eta_{\dots} \right) \partial^\rho h^{\mu\nu} \partial^\sigma h^{\kappa\lambda} \quad , \tag{2.3.1}$$

wobei der erste Tensor aus Termen von jeweils 3 Metriktensoren η_{\dots} aufgebaut ist, die alle möglichen paarweisen Kontraktionen darstellen. Da wegen der Symmetrie des Graviton-Feldes die Kontraktionen (ρ, μ) und (ρ, ν) sowie (ρ, κ) und (ρ, λ) gleichwertig sind, verbleiben als relevante Kontraktionen nur mehr die nachstehenden Paarungen:

$$\rho\mu \quad \nu\sigma \quad \kappa\lambda \quad \rho\mu\nu \leftrightarrow \sigma\kappa\lambda - \text{Symmetrie} = \text{(2.3.8)} \tag{2.3.2}$$

$$\rho\mu \quad \nu\kappa \quad \sigma\lambda \quad \kappa \leftrightarrow \lambda - \text{Symmetrie} = \text{(2.3.4)} \tag{2.3.3}$$

$$\rho\mu \quad \nu\lambda \quad \sigma\kappa \tag{2.3.4}$$

.....

$$\rho\sigma \quad \mu\nu \quad \kappa\lambda \tag{2.3.5}$$

$$\rho\sigma \quad \mu\kappa \quad \nu\lambda \tag{2.3.6}$$

$$\rho\sigma \quad \mu\lambda \quad \nu\kappa \quad \kappa \leftrightarrow \lambda - \text{Symmetrie} = \text{(2.3.6)} \tag{2.3.7}$$

.....

$$\rho\lambda \quad \mu\nu \quad \sigma\kappa \tag{2.3.8}$$

$$\rho\lambda \quad \mu\sigma \quad \nu\kappa \quad \mu \leftrightarrow \nu - \text{Symmetrie} = \text{(2.3.10)} \tag{2.3.9}$$

$$\rho\lambda \quad \mu\kappa \quad \nu\sigma \tag{2.3.10}$$

Formal ergibt sich für den Lagrange-Skalar damit

$$\begin{aligned} L_h &= \left((2.3.6) + (2.3.5) + (2.3.8) + (2.3.4) + (2.3.10) \right) \partial^\rho h^{\mu\nu} \partial^\sigma h^{\kappa\lambda} \\ &= \left(c_1 \eta_{\rho\sigma} \eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\lambda} + c_2 \eta_{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\kappa\lambda} + c_3 \eta_{\rho\lambda} \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\kappa} \right. \\ &\quad \left. + c_4 \eta_{\rho\mu} \eta_{\nu\lambda} \eta_{\sigma\kappa} + c_5 \eta_{\rho\lambda} \eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\sigma} \right) \partial^\rho h^{\mu\nu} \partial^\sigma h^{\kappa\lambda} \quad , \end{aligned}$$

was mit der abkürzenden Schreibweise $h = h^\mu{}_\mu = h_{\mu}{}^\mu$ zu der Darstellung

$$\begin{aligned} L_h &= c_1 \partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\rho h_{\mu\nu} + c_2 \partial^\rho h \partial_\rho h + c_3 \partial_\rho h \partial_\sigma h^{\sigma\rho} \\ &\quad + c_4 \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\sigma h_{\sigma\nu} + c_5 \partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\nu h_{\mu\rho} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

führt. Mit der Umbenennung der Indizes im letzten Term entsprechend

$$\partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\nu h_{\mu\rho} = \partial^\sigma h^{\mu\nu} \partial_\mu h_{\nu\sigma} \quad (2.3.12)$$

sieht man, dass sich dieser vom vorletzten Term nur um eine vollständige Divergenz

$$\begin{aligned} &\partial^\sigma h^{\mu\nu} \partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\mu \left(h^{\mu\nu} \partial^\sigma h_{\sigma\nu} - \partial^\sigma h^{\mu\nu} h_{\nu\sigma} \right) \\ &= \partial^\sigma h^{\mu\nu} \partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\sigma h_{\sigma\nu} - \partial^\sigma h^{\mu\nu} \partial_\mu h_{\nu\sigma} \\ &\quad + h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial^\sigma h_{\sigma\nu} - \partial_\mu \partial^\sigma h^{\mu\nu} h_{\nu\sigma} \\ &= \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\sigma h_{\sigma\nu} + h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial^\sigma h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \partial^\mu h^{\sigma\nu} h_{\nu\mu} \\ &= \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\sigma h_{\sigma\nu} \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

unterscheidet. Damit sind die beiden Terme gleichwertig und man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit entweder $c_4 = 0$ oder $c_5 = 0$ setzen. Beide Ansätze finden sich in der Literatur. Mit dem hier gewählten Ansatz $c_5 = 0$ reduziert sich der Lagrange-Skalar zu:

$$L_h = c_1 \partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\rho h_{\mu\nu} + c_2 \partial^\rho h \partial_\rho h + c_3 \partial_\rho h \partial_\sigma h^{\sigma\rho} + c_4 \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\sigma h_{\sigma\nu} \quad (2.3.14)$$

Die vier verbleibenden Koeffizienten ergeben sich aus der Forderung nach der notwendigen Eichinvarianz

$$h'^{\mu\nu}(x) = h^{\mu\nu}(x) + \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu \quad (2.3.15)$$

des Graviton-Feldes. Betrachtet man die in dem Eichvektor ξ^μ quadratischen Terme, so wird

$$\begin{aligned}
L_{h'}(\xi^2) &= c_1 \partial^\rho (\partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu) \partial_\rho (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) \\
&\quad + 4c_2 \partial^\rho (\partial_\mu \xi^\mu) \partial_\rho (\partial_\nu \xi^\nu) \\
&\quad + 2c_3 \partial_\rho (\partial_\mu \xi^\mu) \partial_\sigma (\partial^\sigma \xi^\rho + \partial^\rho \xi^\sigma) \\
&\quad + c_4 \partial_\mu (\partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu) \partial^\sigma (\partial_\sigma \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\sigma) \\
&= 2c_1 \partial^\rho \partial^\mu \xi^\nu \partial_\rho \partial_\mu \xi_\nu + 2c_1 \partial^\rho \partial^\mu \xi^\nu \partial_\rho \partial_\nu \xi_\mu \\
&\quad + 4c_2 \partial^\rho \partial_\mu \xi^\mu \partial_\rho \partial_\nu \xi^\nu \\
&\quad + 2c_3 \partial_\rho \partial_\mu \xi^\mu \partial_\sigma \partial^\sigma \xi^\rho + 2c_3 \partial_\rho \partial_\mu \xi^\mu \partial^\rho \partial_\sigma \xi^\sigma \\
&\quad + c_4 \partial_\mu \partial^\mu \xi^\nu \partial^\sigma \partial_\sigma \xi_\nu + c_4 \partial_\mu \partial^\mu \xi^\nu \partial_\nu \partial^\sigma \xi_\sigma \\
&\quad + c_4 \partial^\nu \partial_\mu \xi^\mu \partial^\sigma \partial_\sigma \xi_\nu + c_4 \partial^\nu \partial_\mu \xi^\mu \partial_\nu \partial^\sigma \xi_\sigma .
\end{aligned}$$

Setzt man hierin die Identitäten

$$\begin{aligned}
\partial^\rho \partial^\mu \xi^\nu \partial_\rho \partial_\mu \xi_\nu &= \partial^\mu (\partial^\rho \xi^\nu \partial_\rho \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\mu \xi_\nu \partial^\rho \partial_\rho \xi^\nu) + \partial_\mu \partial^\mu \xi^\nu \partial^\sigma \partial_\sigma \xi_\nu \\
\partial^\rho \partial^\mu \xi^\nu \partial_\rho \partial_\nu \xi_\mu &= \partial^\mu (\partial^\rho \xi^\nu \partial_\rho \partial_\nu \xi_\mu - \partial^\rho \partial_\nu \xi^\nu \partial_\rho \xi_\mu) + \partial^\rho \partial_\nu \xi^\nu \partial_\rho \partial^\mu \xi_\mu
\end{aligned}$$

ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
L_{h'}(\xi^2) &\stackrel{\text{div}}{=} 2c_1 \partial^\rho \partial_\nu \xi^\nu \partial_\rho \partial^\mu \xi_\mu + 2c_1 \partial_\mu \partial^\mu \xi^\nu \partial^\sigma \partial_\sigma \xi_\nu \\
&\quad + 4c_2 \partial^\rho \partial_\mu \xi^\mu \partial_\rho \partial_\nu \xi^\nu \\
&\quad + 2c_3 \partial_\rho \partial_\mu \xi^\mu \partial_\sigma \partial^\sigma \xi^\rho + 2c_3 \partial_\rho \partial_\mu \xi^\mu \partial^\rho \partial_\sigma \xi^\sigma \\
&\quad + c_4 \partial_\mu \partial^\mu \xi^\nu \partial^\sigma \partial_\sigma \xi_\nu + c_4 \partial_\mu \partial^\mu \xi^\nu \partial_\nu \partial^\sigma \xi_\sigma \\
&\quad + c_4 \partial^\nu \partial_\mu \xi^\mu \partial^\sigma \partial_\sigma \xi_\nu + c_4 \partial^\nu \partial_\mu \xi^\mu \partial_\nu \partial^\sigma \xi_\sigma \\
&\stackrel{\text{div}}{=} (2c_1 + 4c_2 + 2c_3 + c_4) \partial^\rho \partial_\nu \xi^\nu \partial_\rho \partial^\mu \xi_\mu \\
&\quad + (2c_1 + c_4) \partial_\mu \partial^\mu \xi^\nu \partial^\sigma \partial_\sigma \xi_\nu \\
&\quad + (2c_3 + 2c_4) \partial_\rho \partial_\mu \xi^\mu \partial_\sigma \partial^\sigma \xi^\rho .
\end{aligned}$$

Dies bedeutet

$$\begin{aligned}
L_{h'} &= L_h + L_{h'}(\xi) + L_{h'}(\xi^2) \\
&\stackrel{\text{div}}{=} L_h + L_{h'}(\xi) ,
\end{aligned}$$

wenn das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2c_1 + 4c_2 + 2c_3 + c_4 &= 0 \\ 2c_1 + c_4 &= 0 \\ 2c_3 + 2c_4 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Mit der üblicherweise gewählten Skalierung folgt dann

$$c_1 = +\frac{1}{4}, \quad c_2 = -\frac{1}{4}, \quad c_3 = +\frac{1}{2}, \quad \text{sowie} \quad c_4 = -\frac{1}{2} \quad . \quad (2.3.16)$$

Nach ebenfalls längerer aber analoger Rechnung lässt sich zeigen, dass unter Berücksichtigung der in dem Eichparameter ξ^μ linearen Terme der gleiche Parametersatz insgesamt zu

$$\begin{aligned} L_{h'} &= L_h + L_{h'}(\xi) + L_{h'}(\xi^2) \\ &\stackrel{\text{div}}{=} L_h \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

führt. Da die beiden Lagrange-Skalare sich nur um eine vollständige Divergenz unterscheiden, führen sie zu der gleichen Bewegungsgleichung für das Graviton-Feld. Diese ist damit invariant unter einer Eichtransformation. Damit ergibt sich schließlich der Fierz-Pauli Lagrange-Skalar des Graviton-Feldes:

$${}^1L_h = +\frac{1}{4}\partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\rho h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\partial^\rho h \partial_\rho h + \frac{1}{2}\partial_\rho h \partial_\sigma h^{\sigma\rho} - \frac{1}{2}\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\sigma h_{\sigma\nu} \quad (2.3.18)$$

Unter Berücksichtigung von (2.3.13) erhält man als äquivalente Formulierung für den Lagrange-Skalar des Graviton-Feldes:

$${}^2L_h = +\frac{1}{4}\partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\rho h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\partial^\rho h \partial_\rho h + \frac{1}{2}\partial_\rho h \partial_\sigma h^{\sigma\rho} - \frac{1}{2}\partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\nu h_{\mu\rho} \quad (2.3.19)$$

Anmerkung: Bei umgekehrter Vorzeichenkonvention für den Metriktensor als in diesem Text verwendet, kehren sich auch die Vorzeichen der Terme in den Lagrange-Skalaren um. Diese Varianten der Lagrange-Skalare finden sich oftmals in der Literatur zur ART.

2.4 Die Feldgleichungen des Graviton-Feldes

Für die Ableitung der Feldgleichungen ist der gesamte Lagrange-Skalar unter Berücksichtigung der Wechselwirkung mit der Materie

$$L = L_h - \frac{\kappa}{2} \cdot T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + L_0 \quad (2.4.1)$$

zu betrachten. Als Konsequenz der Eichinvarianz kann das Graviton dabei nur an den Energie-Impulsdichte-Tensor der Materie koppeln. Denn, da der Energie-Impulsdichte-Tensor der einzige zweistufige Tensor ist, zu dem vier erhaltene Ströme gehören, folgt für den Wechselwirkungsterm

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} h'^{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} \left(h^{\mu\nu} + \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu \right) \\ &= T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \partial^\mu (T_{\mu\nu} \xi^\nu) - (\partial^\mu T_{\mu\nu}) \xi^\nu + \partial^\nu (T_{\mu\nu} \xi^\mu) - (\partial^\nu T_{\mu\nu}) \xi^\mu \\ &= T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \partial^\mu (T_{\mu\nu} \xi^\nu) + \partial^\nu (T_{\mu\nu} \xi^\mu) \\ &\stackrel{\text{div}}{=} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad . \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Zur Vorbereitung auf den nächsten Abschnitt werden hier nicht die Lagrange-Skalare 1L_h oder 2L_h verwendet, sondern der weitere gleichwertige Lagrange-Skalar

$${}^3L_h = \frac{1}{2} \left(R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^L \right) h^{\mu\nu} \quad (2.4.3)$$

$$\text{mit} \quad R^L = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^L \quad (2.4.4)$$

$$\text{und} \quad R_{\mu\nu}^L = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial^\rho h_{\rho\nu} - \partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\nu \partial^\rho h_{\rho\mu} \right) \quad . \quad (2.4.5)$$

Die Äquivalenz der Lagrange-Skalare ist leicht zu verifizieren. Mit

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^L &= \frac{1}{2} \left(\partial^\nu \partial^\rho h_{\rho\nu} - \partial^\rho \partial_\rho h - \partial^\nu \partial_\nu h + \partial^\mu \partial^\rho h_{\rho\mu} \right) \\ &= \partial^\mu \partial^\rho h_{\rho\mu} - \partial^\rho \partial_\rho h \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

wird der Lagrange-Skalar

$$\begin{aligned}
{}^3L_h &= \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \partial^\rho h_{\rho\nu} - \partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\nu \partial^\rho h_{\rho\mu} \right) \\
&\quad - \frac{1}{4} h \left(\partial^\mu \partial^\rho h_{\rho\mu} - \partial^\rho \partial_\rho h \right) \\
&= -\frac{1}{4} h^{\mu\nu} \partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} + \frac{1}{4} h \partial^\rho \partial_\rho h \\
&\quad - \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h - \frac{1}{4} h \partial^\mu \partial^\rho h_{\rho\mu} \\
&\quad + \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial^\rho h_{\rho\nu} + \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \partial_\nu \partial^\rho h_{\rho\mu} \\
&= -\frac{1}{4} \partial^\rho (h^{\mu\nu} \partial_\rho h_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} \partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\rho h_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \partial^\rho (h \partial_\rho h) - \frac{1}{4} \partial^\rho h \partial_\rho h \\
&\quad - \frac{1}{4} \partial_\mu \partial_\nu (h^{\mu\nu} h) + \frac{1}{4} \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h + \frac{1}{4} \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial_\mu h \\
&\quad + \frac{1}{2} \partial_\mu (h^{\mu\nu} \partial^\rho h_{\rho\nu}) - \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\rho h_{\rho\nu} \\
&\stackrel{\text{div}}{=} {}^1L_h \quad . \tag{2.4.7}
\end{aligned}$$

Die Lagrange-Skalare unterscheiden sich wiederum nur um ein vollständige Divergenz und führen somit zu identischen Feldgleichungen für das Graviton-Feld. Die Feldgleichungen folgen nun aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial h^{\mu\nu}} - \partial^\rho \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial^\rho h^{\mu\nu})} \right) + \partial^\rho \partial^\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial^\rho \partial^\sigma h^{\mu\nu})} \right) = 0 \quad . \tag{2.4.8}$$

Da der Lagrange-Skalar 3L_h aus Termen der Form $h\partial\partial h$ aufgebaut ist, gilt

$$\frac{\partial {}^3L_h}{\partial h^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \left(R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^L \right) = \partial^\rho \partial^\sigma \left(\frac{\partial {}^3L_h}{\partial (\partial^\rho \partial^\sigma h^{\mu\nu})} \right) \quad . \tag{2.4.9}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen führen damit zu den Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^L = \frac{\kappa}{2} \cdot T_{\mu\nu} \quad . \tag{2.4.10}$$

Aus den Feldgleichungen ergeben sich die Konsistenzbedingungen

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad \implies \quad \partial^\mu \left(R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^L \right) = 0 \quad , \tag{2.4.11}$$

deren Gültigkeit man direkt überprüfen kann:

$$\begin{aligned}
& \partial^\mu \left(R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^L \right) \\
&= \frac{1}{2} \partial^\mu \left((\partial_\mu \partial^\rho h_{\rho\nu} - \partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\nu \partial^\rho h_{\rho\mu}) \right. \\
&\quad \left. - \eta_{\mu\nu} (\partial^\sigma \partial^\rho h_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\rho h) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\partial^\mu \partial_\mu \partial^\rho h_{\rho\nu} - \partial^\mu \partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\mu \partial_\nu h + \partial^\mu \partial_\nu \partial^\rho h_{\rho\mu} \right. \\
&\quad \left. - \partial_\nu \partial^\sigma \partial^\rho h_{\rho\sigma} + \partial_\nu \partial^\rho \partial_\rho h \right) \\
&= 0 \tag{2.4.12}
\end{aligned}$$

Die Eichinvarianz der Feldgleichungen ist in dieser Form leicht einzusehen, da auch

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}^L(h') &= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial^\rho h'_{\rho\nu} - \partial^\rho \partial_\rho h'_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h' + \partial_\nu \partial^\rho h'_{\rho\mu} \right) \\
&= R_{\mu\nu}^L(h) + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial^\rho (\partial_\rho \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\rho) - \partial^\rho \partial_\rho (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) \right. \\
&\quad \left. - 2 \partial_\mu \partial_\nu \partial^\rho \xi_\rho + \partial_\nu \partial^\rho (\partial_\rho \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\rho) \right) \\
&= R_{\mu\nu}^L(h) \tag{2.4.13}
\end{aligned}$$

gilt.

2.5 Der Graviton-Propagator

Der Ausgangspunkt für die Bestimmung des Graviton-Propagators ist der freie Lagrange-Skalar

$${}^1L_h = +\frac{1}{4} \partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\rho h_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \partial^\rho h \partial_\rho h + \frac{1}{2} \partial_\rho h \partial_\sigma h^{\sigma\rho} - \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\sigma h_{\sigma\nu} \quad . \tag{2.5.1}$$

Wie beim Maxwell-Feld ist auch beim Graviton-Feld für konkrete Rechnungen eine geeignete Eichung zu wählen. Wählt man den DeDonder-Eichterm

$$L_{\text{Eich}} = \frac{1}{2} \left(\partial^\sigma h_{\sigma\rho} - \frac{1}{2} \partial_\rho h \right) \left(\partial_\lambda h^{\lambda\rho} - \frac{1}{2} \partial^\rho h \right) \tag{2.5.2}$$

führt dies auf die eichfixierte Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned}
 {}^1L_h + L_{\text{Eich}} &= \frac{1}{4} \partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\rho h_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \partial^\rho h \partial_\rho h + \frac{1}{2} \partial_\rho h \partial_\sigma h^{\sigma\rho} - \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\sigma h_{\sigma\nu} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \partial^\sigma h_{\sigma\rho} \partial_\lambda h^{\lambda\rho} - \frac{1}{4} \partial_\rho h \partial_\lambda h^{\lambda\rho} - \frac{1}{4} \partial^\sigma h_{\sigma\rho} \partial^\rho h + \frac{1}{8} \partial_\rho h \partial^\rho h \\
 &= \frac{1}{4} \partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\rho h_{\mu\nu} - \frac{1}{8} \partial^\rho h \partial_\rho h \\
 &= \frac{1}{8} \partial_\lambda h_{\rho\sigma} \left(\eta^{\rho\mu} \eta^{\sigma\nu} + \eta^{\rho\nu} \eta^{\sigma\mu} - \eta^{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu} \right) \partial^\lambda h_{\mu\nu} \quad , \quad (2.5.3)
 \end{aligned}$$

wobei beim letzten Übergang die Symmetrie des Gravitonsfeldes in den Indizes ausgenutzt wurde. Geht man zum Quantenfeld $h_{\mu\nu} \rightarrow \hat{h}_{\mu\nu}$ über, kann man hieraus den Feynman-Propagator

$$iD^{\mu\nu\rho\sigma}(q^2) = \frac{iP^{\mu\nu\rho\sigma}}{q^2} \quad (2.5.4)$$

mit der Polarisationssumme

$$P^{\mu\nu\rho\sigma} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \quad (2.5.5)$$

ablesen. Die Skalierung der Polarisationssumme ergibt sich mit $\kappa^2 = 16\pi G$ aus der Forderung, dass sich aus dem Baumdiagramm als erste Näherung (siehe hierzu im Kapitel zu den Störungsrechnungen) das bekannte Gravitationsgesetz ergeben muss.

Anmerkung: Oftmals wird in der Literatur $\kappa^2 = 32\pi G$ gewählt. Dann muss im Propagator ein ausgleichender Faktor 1/2 auftreten.

Kapitel 3

Die Selbstkopplung des Gravitons

Die vollen nichtlinearen Einstein-Gleichungen des Gravitationsfeldes werden in diesem Kapitel aus der Feldgleichung des Gravitons konstruiert. Wesentlich hierfür ist die Selbstwechselwirkung des Gravitons. S.Deser hat einen geschickten Ansatz gefunden, bei dem hierfür kein Iterationsprozess notwendig wird [Des04, Des09]. Diesen Ansatz habe ich nachstehend sehr detailliert ausgearbeitet.

3.1 Die spurverschobene Darstellung

Aus den Feldgleichungen (2.4.10) ergibt sich durch Kontraktion

$$-R^L = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} R^L = \frac{\kappa}{2} \cdot \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^M = \frac{\kappa}{2} \cdot T^M \quad . \quad (3.1.1)$$

Dies wiederum in die Feldgleichungen eingesetzt liefert

$$R_{\mu\nu}^L = \frac{\kappa}{2} \cdot \left(T_{\mu\nu}^M - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^M \right) = \frac{\kappa}{2} \cdot t_{\mu\nu}^M \quad (3.1.2)$$

mit dem spurverschobenen Energie-Impulsdichte-Tensor

$$t_{\mu\nu}^M = T_{\mu\nu}^M - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^M \quad (3.1.3)$$

der Materie. Die neue Feldgleichung lässt sich aus einem Wirkungsintegral mit dem freien Lagrange-Skalar

$$L_0(f, \Gamma) = \kappa f^{\mu\nu} (\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho) - \eta^{\mu\nu} (\Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\lambda) \quad , \quad (3.1.4)$$

in dem nur erste Ableitungen auftreten, ableiten. Dabei ist

$$f^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h \quad \implies \quad f = -h \quad (3.1.5)$$

das spurverschobene Feld. Aus der Eichinvarianz des Graviton-Feldes folgt, dass für die neuen Variablen bei Eichtransformationen

$$\delta f^{\mu\nu} = \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu - \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda \quad (3.1.6)$$

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \kappa \partial_\mu \partial_\nu \xi^\rho \quad (3.1.7)$$

sowie $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$ gelten muss. Man verifiziert:

$$\begin{aligned} L_0(f', \Gamma') &= \kappa \left(f^{\mu\nu} + \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu - \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda \right) \\ &\quad \cdot \left(\partial_\rho (\Gamma_{\mu\nu}^\rho + \kappa \partial_\mu \partial_\nu \xi^\rho) - \partial_\nu (\Gamma_{\mu\rho}^\rho + \kappa \partial_\mu \partial_\rho \xi^\rho) \right) \\ &\quad - \eta^{\mu\nu} (\Gamma_{\rho\lambda}^\rho + \kappa \partial_\rho \partial_\lambda \xi^\rho) (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \kappa \partial_\mu \partial_\nu \xi^\lambda) \\ &\quad + \eta^{\mu\nu} (\Gamma_{\nu\lambda}^\rho + \kappa \partial_\nu \partial_\lambda \xi^\rho) (\Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \kappa \partial_\mu \partial_\rho \xi^\lambda) \\ &= L_0(f, \Gamma) + \kappa f^{\mu\nu} \left(\kappa \partial_\rho \partial_\mu \partial_\nu \xi^\rho - \kappa \partial_\nu \partial_\mu \partial_\rho \xi^\rho \right) \\ &\quad + \kappa \left(\partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu \right) \left(\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \kappa \partial_\rho \partial_\mu \partial_\nu \xi^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho - \kappa \partial_\nu \partial_\mu \partial_\rho \xi^\rho \right) \\ &\quad - \kappa \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda \left(\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \kappa \partial_\rho \partial_\mu \partial_\nu \xi^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho - \kappa \partial_\nu \partial_\mu \partial_\rho \xi^\rho \right) \\ &\quad - \eta^{\mu\nu} \left(\Gamma_{\rho\lambda}^\rho \kappa \partial_\mu \partial_\nu \xi^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \kappa \partial_\rho \partial_\lambda \xi^\rho + \kappa^2 \partial_\mu \partial_\nu \xi^\lambda \partial_\rho \partial_\lambda \xi^\rho \right) \\ &\quad + \eta^{\mu\nu} \left(\Gamma_{\nu\lambda}^\rho \kappa \partial_\mu \partial_\rho \xi^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \kappa \partial_\nu \partial_\lambda \xi^\rho + \kappa^2 \partial_\nu \partial_\lambda \xi^\rho \partial_\mu \partial_\rho \xi^\lambda \right) \\ &\stackrel{\text{div}}{=} L_0(f, \Gamma) + 0 \\ &\quad - \underbrace{\Gamma_{\mu\nu}^\rho \kappa \partial_\rho \partial^\mu \xi^\nu}_a + \underbrace{\Gamma_{\mu\rho}^\rho \kappa \partial_\nu \partial^\mu \xi^\nu}_b - \underbrace{\Gamma_{\mu\nu}^\rho \kappa \partial_\rho \partial^\nu \xi^\mu}_c + \underbrace{\Gamma_{\mu\rho}^\rho \kappa \partial_\nu \partial^\nu \xi^\mu}_d \\ &\quad + \underbrace{\eta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \kappa \partial_\rho \partial_\lambda \xi^\lambda}_e - \underbrace{\eta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\rho}^\rho \kappa \partial_\nu \partial_\lambda \xi^\lambda}_b \\ &\quad - \underbrace{\eta^{\mu\nu} \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \kappa \partial_\mu \partial_\nu \xi^\lambda}_d - \underbrace{\eta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \kappa \partial_\rho \partial_\lambda \xi^\rho}_e \\ &\quad + \underbrace{\eta^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \kappa \partial_\mu \partial_\rho \xi^\lambda}_a + \underbrace{\eta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \kappa \partial_\nu \partial_\lambda \xi^\rho}_c \\ &= L_0(f, \Gamma) \quad (3.1.8) \end{aligned}$$

Für den Wechselwirkungsterm mit der Materie verwendet man zweckmäßigerweise die wie folgt umgeformte Darstellung

$$\begin{aligned}
 L_W^M &= -\frac{\kappa}{2} \cdot T_{\mu\nu}^M h^{\mu\nu} \\
 &= -\frac{\kappa}{2} \cdot \left(T_{\mu\nu}^M h^{\mu\nu} - T_{\mu\nu}^M \cdot \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^M h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^M \cdot \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h \right) \\
 &= -\frac{\kappa}{2} \cdot \left(T_{\mu\nu}^M - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^M \right) \left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h \right) \\
 &= -\frac{\kappa}{2} \cdot t_{\mu\nu}^M f^{\mu\nu} \quad .
 \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Damit wird das angepasste Wirkungsintegral

$$W = \int \left(\frac{1}{\kappa^2} \cdot L_0(f, \Gamma) - \frac{\kappa}{2} \cdot t_{\mu\nu}^M f^{\mu\nu} \right) d^4x \quad . \tag{3.1.10}$$

Variation liefert

$$\frac{\delta W}{\delta f^{\mu\nu}} = 0 \quad \implies \quad \frac{1}{\kappa} \left(\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \frac{1}{2} \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho - \frac{1}{2} \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\rho \right) = \frac{\kappa}{2} \cdot t_{\mu\nu}^M \tag{3.1.11}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 &\frac{\delta}{\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma} \int \eta^{\mu\nu} (\Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\lambda) d^4x \\
 &= \eta^{\mu\nu} \delta_\sigma^{(\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta)} + \eta^{\alpha\beta} \Gamma_{\rho\sigma}^\rho - \eta^{\mu(\alpha} \Gamma_{\mu\sigma}^{\beta)} - \eta^{\nu(\alpha} \Gamma_{\nu\sigma}^{\beta)} \\
 &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \delta_\sigma^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \delta_\sigma^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \eta^{\alpha\beta} \Gamma_{\rho\sigma}^\rho - \eta^{\mu\alpha} \Gamma_{\mu\sigma}^\beta - \eta^{\mu\beta} \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \tag{3.1.12}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 &\frac{\delta}{\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma} \int f^{\mu\nu} (\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho) d^4x \\
 &= -\partial_\sigma f^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_\nu f^{\alpha\nu} \delta_\sigma^\beta + \frac{1}{2} \partial_\nu f^{\beta\nu} \delta_\sigma^\alpha \quad .
 \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Die beiden letzten Variationen zusammen ergeben

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \delta_\sigma^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \delta_\sigma^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \eta^{\alpha\beta} \Gamma_{\rho\sigma}^\rho - \eta^{\mu\alpha} \Gamma_{\mu\sigma}^\beta - \eta^{\mu\beta} \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \\
 &= \kappa \left(-\partial_\sigma f^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_\nu f^{\alpha\nu} \delta_\sigma^\beta + \frac{1}{2} \partial_\nu f^{\beta\nu} \delta_\sigma^\alpha \right) \quad .
 \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Dies ist eine rein algebraische Beziehung für das Γ -Feld, d.h. das Γ -Feld stellt eine rein aus dem Graviton-Feld abgeleitete Bedingung dar. Kontraktion mit dem Tensor δ_β^σ liefert

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + 2\eta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \eta^{\alpha\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\rho - \eta^{\mu\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^\beta - \eta^{\mu\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \\ & = \kappa \left(-\partial_\beta f^{\alpha\beta} + 2 \partial_\nu f^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \partial_\nu f^{\alpha\nu} \right) \\ \implies & \quad \eta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \kappa \partial_\nu f^{\alpha\nu} \quad . \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Kontraktion mit $\eta_{\alpha\beta}$ ergibt weiter

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta_{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta_{\sigma\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + 4\Gamma_{\rho\sigma}^\rho - \Gamma_{\beta\sigma}^\beta - \Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha \\ & = \kappa \left(-\partial_\sigma f + \frac{1}{2} \partial_\nu f^{\alpha\nu} \eta_{\alpha\sigma} + \frac{1}{2} \partial_\nu f^{\beta\nu} \eta_{\beta\sigma} \right) \\ \implies & \quad \Gamma_{\rho\sigma}^\rho = -\frac{\kappa}{2} \partial_\sigma f \quad , \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

wobei im letzten Schritt (3.1.15) ausgenutzt wurde. Durch die beiden vorstehenden Ergebnisse wird das Γ -Feld eindeutig festgelegt. Wegen Lorentz-Invarianz, der Symmetrie in den unteren beiden Indizes und der notwendigen Linearität kann es nur die Struktur

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \cdot \Gamma_{\mu\nu}^\alpha & = c_1 \partial^\alpha f_{\mu\nu} + c_2 \eta^{\alpha\rho} \partial_\mu f_{\nu\rho} + c_2 \eta^{\alpha\rho} \partial_\nu f_{\mu\rho} \\ & + c_3 \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha f + c_4 \delta_\mu^\alpha \partial_\nu f + c_4 \delta_\nu^\alpha \partial_\mu f \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

besitzen. Mit diesem Ansatz wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \cdot \eta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha & = c_1 \partial^\alpha f + c_2 \partial_\mu f^{\mu\alpha} + c_2 \partial_\nu f^{\nu\alpha} \\ & + c_3 \cdot 4 \partial^\alpha f + c_4 \partial^\alpha f + c_4 \partial^\alpha f \\ & = (c_1 + 4c_3 + 2c_4) \partial^\alpha f + 2c_2 \partial_\mu f^{\mu\alpha} \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \cdot \Gamma_{\mu\nu}^\mu & = c_1 \partial^\mu f_{\mu\nu} + c_2 \partial^\rho f_{\nu\rho} + c_2 \partial_\nu f \\ & + c_3 \partial_\nu f + c_4 \cdot 4 \partial_\nu f + c_4 \partial_\nu f \\ & = (c_1 + c_2) \partial^\mu f_{\mu\nu} + (c_2 + c_3 + 5c_4) \partial_\nu f \quad . \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Vergleich mit (3.1.15) und (3.1.16) führt auf das Gleichungssystem

$$2c_2 = 1 \quad (3.1.20)$$

$$c_1 + 4c_3 + 2c_4 = 0 \quad (3.1.21)$$

$$c_1 + c_2 = 0 \quad (3.1.22)$$

$$c_2 + c_3 + 5c_4 = -1/2 \quad (3.1.23)$$

mit der Lösung

$$c_1 = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = +\frac{1}{2}, \quad c_3 = +\frac{1}{4}, \quad c_4 = -\frac{1}{4} \quad . \quad (3.1.24)$$

Dies bedeutet

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \cdot \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= -\frac{1}{2} \partial^{\alpha} f_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} \partial_{\mu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} \partial_{\nu} f_{\mu\rho} \\ &\quad + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \partial^{\alpha} f - \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\alpha} \partial_{\nu} f - \frac{1}{4} \delta_{\nu}^{\alpha} \partial_{\mu} f \quad . \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Unter Ausnutzung von (3.1.5) ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \cdot \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= -\frac{1}{2} \partial^{\alpha} \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} \partial_{\nu} \left(h_{\mu\rho} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\rho} h \right) + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} \partial_{\mu} \left(h_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \eta_{\nu\rho} h \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \partial^{\alpha} h + \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\alpha} \partial_{\nu} h + \frac{1}{4} \delta_{\nu}^{\alpha} \partial_{\mu} h \\ &= \frac{\eta^{\alpha\rho}}{2} \left(\partial_{\mu} h_{\nu\rho} + \partial_{\nu} h_{\mu\rho} - \partial_{\rho} h_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

durch das Graviton-Feld. Dies wiederum bedeutet

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \left(\partial_{\rho} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \frac{1}{2} \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\rho}^{\rho} - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{\rho} \right) \\ &= \frac{\eta^{\rho\sigma}}{2} \left(\partial_{\rho} \partial_{\mu} h_{\nu\sigma} + \partial_{\rho} \partial_{\nu} h_{\mu\sigma} - \partial_{\rho} \partial_{\sigma} h_{\mu\nu} \right) \\ &\quad - \frac{\eta^{\rho\sigma}}{4} \left(\partial_{\nu} \partial_{\mu} h_{\rho\sigma} + \partial_{\nu} \partial_{\rho} h_{\mu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\mu\rho} \right) \\ &\quad - \frac{\eta^{\rho\sigma}}{4} \left(\partial_{\mu} \partial_{\nu} h_{\rho\sigma} + \partial_{\mu} \partial_{\rho} h_{\nu\sigma} - \partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\nu\rho} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\partial^{\sigma} \partial_{\mu} h_{\nu\sigma} + \partial^{\sigma} \partial_{\nu} h_{\mu\sigma} - \partial^{\sigma} \partial_{\sigma} h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Dies in die Dynamikgleichung (3.1.11) eingesetzt liefert

$$\frac{1}{2} \left(\partial^\sigma \partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial^\sigma \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h \right) = \frac{\kappa}{2} \cdot t_{\mu\nu}^M \quad . \quad (3.1.28)$$

Der Vergleich der linken Seite dieser Gleichung mit (2.4.5) zeigt schließlich, dass aus dem angepassten Wirkungsintegral

$$W = \int \left(\frac{1}{\kappa^2} \cdot L_0(f, \Gamma) - \frac{\kappa}{2} \cdot t_{\mu\nu}^M f^{\mu\nu} \right) d^4x \quad . \quad (3.1.29)$$

mit dem Lagrange-Skalar

$$L_0(f, \Gamma) = \kappa f^{\mu\nu} (\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho) - \eta^{\mu\nu} (\Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\lambda) \quad , \quad (3.1.30)$$

die spurverschobenen Feldgleichungen (3.1.2)

$$R_{\mu\nu}^L = \frac{\kappa}{2} \cdot t_{\mu\nu}^M \quad (3.1.31)$$

folgen.

3.2 Die Selbstkopplung des Graviton-Feldes

Die Quelle des Graviton-Feldes ist der Energie-Impulsdichte-Tensor. Nun besitzt das Graviton-Feld auch selbst Energie; d.h. die Feldgleichung ist durch einen Quellterm des Graviton-Feldes entsprechend

$$R_{\mu\nu}^L = \frac{\kappa}{2} \cdot (t_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}^M) \quad (3.2.1)$$

zu ergänzen. Da ein Spin-2 Feld aber keinen eichinvarianten Energie-Impulsdichte-Tensor besitzen kann, kann man (anders wie bei der Kopplung mit Materie) nicht auf den Kopplungsterm im Wirkungsintegral des Gravitons schließen. In jedem Fall muss sich aber der Energie-Impulsdichte-Tensor entsprechend (3.2.1) als Quellterm ergeben.

Betrachtet man ausschließlich das Graviton-Feld, dann muss mit einem Selbstkopplungsterm L_{SK} die Feldgleichung

$$R_{\mu\nu}^L = \frac{\kappa}{2} t_{\mu\nu} \quad (3.2.2)$$

aus dem kovariant formulierten Wirkungsintegral

$$W(f, \Gamma, \gamma) = \frac{1}{\kappa^2} \int \left(L_0(f, \Gamma, \gamma) + L_{SK}(f, \Gamma, \gamma) \right) d^4x \quad (3.2.3)$$

und dem spurverschobenen Energie-Impulsdichte-Tensor

$$t_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T \quad (3.2.4)$$

mit

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \left. \frac{\delta W(f, \Gamma, \gamma)}{\delta \gamma^{\mu\nu}} \right|_{\gamma_{xx}=\eta_{xx}} \quad (3.2.5)$$

folgen. Interpretiert man $f^{\mu\nu}$ als Tensordichte vom Gewicht 1 und $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ als normalen Tensor, dann ist der kovariant formulierte Lagrange-Skalar:

$$L_0(f, \Gamma, \gamma) = \kappa f^{\mu\nu} (D_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - D_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho) - \sqrt{-\gamma} \gamma^{\mu\nu} (\Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\lambda) \quad (3.2.6)$$

Dabei ist die kovariante Ableitung

$$D_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho + C_{\sigma\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - C_{\sigma\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho - C_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \quad (3.2.7)$$

mit dem auf γ bezogenen Levi-Civita-Zusammenhang

$$C_{\mu\nu}^\lambda = = \frac{\gamma^{\lambda\rho}}{2} \left(\partial_\mu \gamma_{\nu\rho} + \partial_\nu \gamma_{\mu\rho} - \partial_\rho \gamma_{\mu\nu} \right) \quad (3.2.8)$$

Es wird sich zeigen, dass

$$L_{SK}(f, \Gamma, \gamma) = \kappa f^{\mu\nu} (\Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\lambda) \quad (3.2.9)$$

zum gewünschten Ergebnis führt.

3.3 Der Energie-Impulsdichte-Tensor

Da $L_{SK}(f, \Gamma, \gamma)$ keinen Beitrag liefert, ist nach den Überlegungen im vorherigen Abschnitt leicht einzusehen, dass

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} - \Sigma_{\mu\nu} \quad (3.3.1)$$

mit

$$\Sigma_{\mu\nu} = - \frac{2}{\kappa \sqrt{-\gamma}} \frac{\delta}{\delta \gamma^{\mu\nu}} \int f^{\alpha\beta} (D_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - D_\beta \Gamma_{\alpha\rho}^\rho) d^4x \Big|_{\gamma_{xx}=\eta_{xx}} \quad (3.3.2)$$

sowie

$$S_{\mu\nu} = - \frac{2}{\kappa^2 \sqrt{-\gamma}} \frac{\delta}{\delta \gamma^{\mu\nu}} \int \sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \cdot (\Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \Gamma_{\beta\lambda}^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\lambda) d^4x \Big|_{\gamma_{xx}=\eta_{xx}} \quad (3.3.3)$$

wird. Setzt man $A_{\alpha\beta} = (\Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \Gamma_{\beta\lambda}^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\lambda)$ so erhält man

$$\frac{\delta}{\delta\gamma^{\mu\nu}} \int \sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} d^4x = -\frac{1}{2} \sqrt{-\gamma} \gamma_{\mu\nu} A + \sqrt{-\gamma} A_{\mu\nu} \quad . \quad (3.3.4)$$

Dies bedeutet

$$S_{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa^2} \left(A_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} A \right) \quad (3.3.5)$$

bzw. spurverschoben

$$s_{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa^2} A_{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa^2} (\Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\lambda) \quad . \quad (3.3.6)$$

Mit

$$\begin{aligned} L_\Sigma &= f^{\alpha\beta} (D_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - D_\beta \Gamma_{\alpha\rho}^\rho) \\ &= f^{\alpha\beta} \left(\partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\rho + C_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - C_{\rho\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\rho - C_{\rho\beta}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \right. \\ &\quad \left. - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\rho}^\rho - C_{\beta\lambda}^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\lambda + C_{\beta\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho + C_{\beta\rho}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \right) \\ &= f^{\alpha\beta} \left(\partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\rho}^\rho + C_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - 2C_{\rho\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\rho + C_{\beta\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho \right) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

wendet man für die nächste Rechnung am zweckmäßigsten die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{\delta \int L_\Sigma d^4x}{\delta\gamma^{\mu\nu}} &= \frac{\partial L_\Sigma}{\partial\gamma^{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L_\Sigma}{\partial(\partial_\sigma \gamma^{\mu\nu})} \right) \\ &= \frac{\partial L_\Sigma}{\partial C_{st}^r} \frac{\partial C_{st}^r}{\partial\gamma^{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L_\Sigma}{\partial C_{st}^r} \frac{\partial C_{st}^r}{\partial(\partial_\sigma \gamma^{\mu\nu})} \right) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

an. Nun wird

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial C_{st}^r}{\partial\gamma^{\mu\nu}} \right|_{\gamma_{xx}=\eta_{xx}} &= \frac{\partial}{\partial\gamma^{\mu\nu}} \left(\frac{\gamma^{r\rho}}{2} \left(\partial_s \gamma_{t\rho} + \partial_t \gamma_{s\rho} - \partial_\rho \gamma_{st} \right) \right) \Big|_{\gamma_{xx}=\eta_{xx}} \\ &= \frac{1}{2} \delta_{(\mu}^r \delta_{\nu)}^\rho \left(\partial_s \gamma_{t\rho} + \partial_t \gamma_{s\rho} - \partial_\rho \gamma_{st} \right) \Big|_{\gamma_{xx}=\eta_{xx}} \\ &= \frac{1}{2} \delta_{(\mu}^r \delta_{\nu)}^\rho \left(\partial_s \eta_{t\rho} + \partial_t \eta_{s\rho} - \partial_\rho \eta_{st} \right) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Dies wiederum bedeutet

$$\kappa \Sigma_{\mu\nu} = 2\partial_\sigma \left(\frac{\partial L_\Sigma}{\partial C_{st}^r} \frac{\partial C_{st}^r}{\partial(\partial_\sigma \gamma^{\mu\nu})} \right) \Big|_{\gamma_{xx}=\eta_{xx}} \quad . \quad (3.3.10)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial C_{st}^r}{\partial(\partial_\sigma \gamma^{\mu\nu})} \right|_{\gamma_{xx}=\eta_{xx}} &= \left. \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \gamma^{\mu\nu})} \left(\frac{\gamma^{r\rho}}{2} \left(\partial_s \gamma_{t\rho} + \partial_t \gamma_{s\rho} - \partial_\rho \gamma_{st} \right) \right) \right|_{\gamma_{xx}=\eta_{xx}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \gamma^{\mu\nu})} \left(-\gamma^{r\rho} \gamma_{t\alpha} \gamma_{\rho\beta} \partial_s \gamma^{\alpha\beta} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. -\gamma^{r\rho} \gamma_{s\alpha} \gamma_{\rho\beta} \partial_t \gamma^{\alpha\beta} + \gamma^{r\rho} \gamma_{s\alpha} \gamma_{t\beta} \partial_\rho \gamma^{\alpha\beta} \right) \right|_{\gamma_{xx}=\eta_{xx}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(-\eta^{r\rho} \eta_{t\mu} \eta_{\rho\nu} \delta_s^\sigma - \eta^{r\rho} \eta_{s\mu} \eta_{\rho\nu} \delta_t^\sigma + \eta^{r\rho} \eta_{s\mu} \eta_{t\nu} \delta_\rho^\sigma \right) \Big|_{\mu\leftrightarrow\nu} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(-\eta_{t\mu} \delta_\nu^r \delta_s^\sigma - \eta_{s\mu} \delta_\nu^r \delta_t^\sigma + \eta^{r\sigma} \eta_{s\mu} \eta_{t\nu} \right) \Big|_{\mu\leftrightarrow\nu} . \tag{3.3.11}
\end{aligned}$$

Dabei soll $\mu \leftrightarrow \nu$ kennzeichnen, dass eine Symmetrisierung über die entsprechenden Indizes notwendig ist. Weiter wird

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_\Sigma}{\partial C_{st}^r} &= f^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial C_{st}^r} \left(\partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\rho}^\rho + C_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - 2C_{\rho\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\rho + C_{\beta\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho \right) \\
&= \left(f^{\alpha\beta} \delta_r^\rho \delta_\rho^s \delta_t^\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - 2f^{\alpha\beta} \delta_r^\lambda \delta_\rho^s \delta_\alpha^\rho \Gamma_{\lambda\beta}^\rho + f^{\alpha\beta} \delta_r^\lambda \delta_\beta^s \delta_\alpha^\rho \Gamma_{\lambda\rho}^\rho \right) \Big|_{s\leftrightarrow t} \\
&= \left(f^{\alpha\beta} \delta_r^s \Gamma_{\alpha\beta}^t - 2f^{t\beta} \Gamma_{r\beta}^s + f^{ts} \Gamma_{r\rho}^\rho \right) \Big|_{s\leftrightarrow t} . \tag{3.3.12}
\end{aligned}$$

Die beiden vorstehenden Ergebnisse zusammengefasst liefert unter Berücksichtigung der schon vorliegenden $s \leftrightarrow t$ Symmetrie des zweiten Faktors:

$$\begin{aligned}
&\left(f^{\alpha\beta} \delta_r^s \Gamma_{\alpha\beta}^t - 2f^{t\beta} \Gamma_{r\beta}^s + f^{ts} \Gamma_{r\rho}^\rho \right) \left(-\eta_{t\mu} \delta_\nu^r \delta_s^\sigma - \eta_{s\mu} \delta_\nu^r \delta_t^\sigma + \eta^{r\sigma} \eta_{s\mu} \eta_{t\nu} \right) \Big|_{\mu\leftrightarrow\nu} \\
&= \left(\underbrace{-\eta_{t\mu} \delta_\nu^r f^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^t}_a + 2\eta_{t\mu} f^{t\beta} \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \underbrace{\eta_{t\mu} f^{t\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^\rho}_b \right. \\
&\quad \left. - \eta_{\mu\nu} f^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + 2\eta_{s\mu} f^{\sigma\beta} \Gamma_{\nu\beta}^s - \underbrace{\eta_{s\mu} f^{\sigma s} \Gamma_{\nu\rho}^\rho}_b \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\eta_{t\nu} \delta_\mu^r f^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^t}_a - 2\eta^{r\sigma} \eta_{s\mu} \eta_{t\nu} f^{t\beta} \Gamma_{r\beta}^s + \eta^{r\sigma} \eta_{s\mu} \eta_{t\nu} f^{ts} \Gamma_{r\rho}^\rho \right) \Big|_{\mu\leftrightarrow\nu} \\
&= \left(2f_\mu^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - 2f_\mu^\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\rho - \eta_{\mu\nu} f^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \right. \\
&\quad \left. + 2\eta_{s\mu} f^{\sigma\beta} \Gamma_{\nu\beta}^s - 2\eta^{r\sigma} \eta_{s\mu} f_\nu^\beta \Gamma_{r\beta}^s + \eta^{r\sigma} f_{\mu\nu} \Gamma_{r\rho}^\rho \right) \Big|_{\mu\leftrightarrow\nu} \tag{3.3.13}
\end{aligned}$$

Überschieben mit $\eta^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu}(\dots)(\dots)\Big|_{\mu\leftrightarrow\nu} &= 2f^{\nu\beta}\Gamma_{\nu\beta}^\sigma - 2f^{\nu\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^\rho - 4f^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \\ &\quad + 2f^{\sigma\beta}\Gamma_{\nu\beta}^\nu - 2\eta^{r\sigma}f_s^\beta\Gamma_{r\beta}^s + \eta^{r\sigma}f\Gamma_{r\rho}^\rho \\ &= -2f^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - 2\eta^{r\sigma}f_s^\beta\Gamma_{r\beta}^s + \eta^{r\sigma}f\Gamma_{r\rho}^\rho \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Sammelt man die vorstehenden Ergebnisse zusammen, so folgt spurverschoben

$$\begin{aligned} \kappa\sigma_{\mu\nu} &= \kappa\left(\Sigma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Sigma\right) \\ &= \partial_\sigma\left(2f_\mu^\beta\Gamma_{\nu\beta}^\sigma - 2f_\mu^\sigma\Gamma_{\nu\rho}^\rho - \eta_{\mu\nu}f^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma\right)_a \\ &\quad + 2\eta_{s\mu}f^{\sigma\beta}\Gamma_{\nu\beta}^s - 2\eta^{r\sigma}\eta_{s\mu}f_\nu^\beta\Gamma_{r\beta}^s + \eta^{r\sigma}f_{\mu\nu}\Gamma_{r\rho}^\rho \\ &\quad + \eta_{\mu\nu}f^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma\Big|_{\mu\leftrightarrow\nu} + \eta_{\mu\nu}\eta^{r\sigma}f_s^\beta\Gamma_{r\beta}^s - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{r\sigma}f\Gamma_{r\rho}^\rho \\ &= \partial^\sigma\left(2\eta_{\sigma s}f_\mu^\beta\Gamma_{\nu\beta}^s - 2f_{\sigma\mu}\Gamma_{\nu\rho}^\rho\right. \\ &\quad + 2\eta_{s\mu}f_\sigma^\beta\Gamma_{\nu\beta}^s - 2\eta_{s\mu}f_\nu^\beta\Gamma_{\sigma\beta}^s + f_{\mu\nu}\Gamma_{\sigma\rho}^\rho \\ &\quad \left.+ \eta_{\mu\nu}f_s^\beta\Gamma_{\sigma\beta}^s - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}f\Gamma_{\sigma\rho}^\rho\right)\Big|_{\mu\leftrightarrow\nu} . \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Damit wird der spurverschobene Energie-Impulsdichte-Tensor zu

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu} &= s_{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu} \\ &= -\frac{2}{\kappa^2}\left(\Gamma_{\rho\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\rho}^\lambda\right) \\ &\quad - \frac{1}{\kappa}\cdot\partial^\sigma\left(2\eta_{\sigma s}f_\mu^\beta\Gamma_{\nu\beta}^s - 2f_{\sigma\mu}\Gamma_{\nu\rho}^\rho\right. \\ &\quad \left.+ 2\eta_{s\mu}f_\sigma^\beta\Gamma_{\nu\beta}^s - 2\eta_{s\mu}f_\nu^\beta\Gamma_{\sigma\beta}^s + f_{\mu\nu}\Gamma_{\sigma\rho}^\rho\right. \\ &\quad \left.+ \eta_{\mu\nu}f_s^\beta\Gamma_{\sigma\beta}^s - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}f\Gamma_{\sigma\rho}^\rho\right)\Big|_{\mu\leftrightarrow\nu} . \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

3.4 Die Einstein-Gleichung

Es war

$$W = \frac{1}{\kappa^2}\int\left(\kappa f^{\mu\nu}(\partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\rho}^\rho) - (\eta^{\mu\nu} - \kappa f^{\mu\nu})(\Gamma_{\rho\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\rho}^\lambda)\right)d^4x .$$

Addiert man hierzu im Integranden die vollständigen Divergenzen

$$L_{\text{div}} = -\partial_\rho(\eta^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\rho) + \partial_\nu(\eta^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\rho) = -\eta^{\mu\nu}(\partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\rho}^\rho) \quad , \quad (3.4.1)$$

durch die die Dynamik-Gleichungen nicht verändert werden, und führt die neuen Felder

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa f^{\mu\nu} \quad (3.4.2)$$

$$g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu \quad (3.4.3)$$

$$g = \det[g_{\mu\nu}] \quad (3.4.4)$$

ein, so ergibt sich schließlich

$$W \stackrel{\text{div}}{=} -\frac{1}{\kappa^2} \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\rho}^\lambda) d^4x \quad . \quad (3.4.5)$$

Dies ist aber nichts anderes als das vollständige Wirkungsintegral der ART im Palatini-Formalismus, wenn man $g_{\mu\nu}$ als Metriktensor und $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ als affinen Zusammenhang einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit mit den Koordinaten x interpretiert.

Variation nach $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ (für die detaillierten Rechnungen sei auf mein Buch über die Allgemeine Relativitätstheorie verwiesen) führt zu

$$\nabla_\rho(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0 \quad , \quad (3.4.6)$$

was sich rein algebraisch entsprechend

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (3.4.7)$$

formulieren lässt. Der affine Zusammenhang besitzt natürlich auch hier keine unabhängige Dynamik. Die vorstehende Beziehung zeigt auch, warum sich $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ nicht explizit nach dem Feld $f^{\mu\nu}$ auflösen lässt, denn aus

$$\begin{aligned} (\eta^{\mu\rho} - \kappa f^{\mu\rho})(\eta_{\rho\nu} + \kappa f_{\rho\nu}) &= \eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} + \kappa\eta^{\mu\rho}f_{\rho\nu} - \kappa f^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} - \kappa^2 f^{\mu\rho}f_{\rho\nu} \\ &= \delta_\nu^\mu - \kappa^2 f^{\mu\rho}f_{\rho\nu} \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

sowie der Definitionen (3.4.2) folgt, dass

$$\frac{g_{\rho\nu}}{\sqrt{-g}} = \eta_{\rho\nu} + \kappa f_{\rho\nu} + \sum_{n=2}^{\infty} \kappa^n \text{Term}_n(f) \quad (3.4.9)$$

sein muss. Hierdurch ergibt sich die Nichtlinearität der Theorie mit Selbstkopplung. Zudem wird deutlich, dass im zugrunde liegenden Minkowski-Raum $g_{\mu\nu}$ nicht mit dem Tensor $\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}g^{\rho\sigma}$ identisch ist!

Variation des Wirkungsintegrals nach der $g^{\mu\nu}$ liefert mit dem Ricci-Tensor

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \quad (3.4.10)$$

und seiner Kontraktion $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ für das freie Gravitationsfeld die Einstein-Gleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad . \quad (3.4.11)$$

Die Selbstkopplung des Graviton-Feldes hat die volle Einstein-Gleichung geliefert. Dies führt zu der Interpretation, dass das Graviton-Feld die Freiheitsgrade eines Riemann-Raumes repräsentiert, in dem die anderen Felder als eingebettet betrachtet werden können.

3.5 Die Feldgleichung bei Selbstkopplung

Es verbleibt zu zeigen, dass aus dem Wirkungsintegral

$$W(f, \Gamma) = \frac{1}{\kappa^2} \int \left(L_0(f, \Gamma) + L_{SK}(f, \Gamma) \right) d^4x \quad (3.5.1)$$

mit

$$L_0(f, \Gamma) = \kappa f^{\mu\nu} (\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho) - \eta^{\mu\nu} (\Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\lambda) \quad (3.5.2)$$

sowie

$$L_{SK}(f, \Gamma) = \kappa f^{\mu\nu} (\Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\lambda) \quad (3.5.3)$$

tatsächlich die Feldgleichung

$$R_{\mu\nu}^L = \frac{\kappa}{2} t_{\mu\nu} \quad (3.5.4)$$

folgt. Analog wie (3.1.11) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta f^{\mu\nu}} = 0 &\implies \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \frac{1}{2} \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho - \frac{1}{2} \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\rho = -(\Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\lambda) \\ &= \frac{\kappa^2}{2} s_{\mu\nu} \quad , \quad (3.5.5) \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt (3.3.6) verwendet wurde.

Weiter ergibt sich ebenso analog zu (3.1.14), wenn man überall $\eta^{\mu\nu} + \kappa f^{\mu\nu}$ einsetzt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} + \kappa f^{\mu\nu}) \delta_\sigma^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta + \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} + \kappa f^{\mu\nu}) \delta_\sigma^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + (\eta^{\alpha\beta} + \kappa f^{\alpha\beta}) \Gamma_{\rho\sigma}^\rho \\ & \quad - (\eta^{\mu\alpha} + \kappa f^{\mu\alpha}) \Gamma_{\mu\sigma}^\beta - (\eta^{\mu\beta} + \kappa f^{\mu\beta}) \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \\ & = \kappa \left(-\partial_\sigma f^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_\nu f^{\alpha\nu} \delta_\sigma^\beta + \frac{1}{2} \partial_\nu f^{\beta\nu} \delta_\sigma^\alpha \right) \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Diese Gleichung ist allerdings nichtlinear und lässt sich nicht mehr explizit auflösen. Siehe hierzu (3.4.9). Es gibt jedoch eine alternative Möglichkeit zur Lösung. Hierzu ist Gleichung (2.4.5) durch das spurverschobene Feld auszudrücken

$$\begin{aligned} 2R_{\mu\nu}^L &= \partial_\mu \partial^\rho h_{\rho\nu} - \partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\nu \partial^\rho h_{\rho\mu} \\ &= \partial_\mu \partial^\rho \left(f_{\rho\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\rho\nu} f \right) - \partial^\rho \partial_\rho \left(f_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} f \right) \\ & \quad + \partial_\mu \partial_\nu f + \partial_\nu \partial^\rho \left(f_{\rho\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\rho\mu} f \right) \\ &= -\partial_\rho \partial^\rho f_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\rho f_{\rho\nu} + \partial_\nu \partial^\rho f_{\rho\mu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial_\rho f \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

und die kovariante Ableitung von $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ auszunutzen. Nun ist $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ eine Tensordichte vom Gewicht 1, so dass sich

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\rho (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) \\ &= \partial_\rho (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \sqrt{-g}g^{\lambda\nu} + \Gamma_{\rho\lambda}^\nu \sqrt{-g}g^{\mu\lambda} - \kappa \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \\ &= -\kappa \partial_\rho f^{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu (\eta^{\lambda\nu} - \kappa f^{\lambda\nu}) + \Gamma_{\rho\lambda}^\nu (\eta^{\mu\lambda} - \kappa f^{\mu\lambda}) - \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda (\eta^{\mu\nu} - \kappa f^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

ergibt. Dies bedeutet:

$$\partial_\rho f_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} \left(\eta_{\mu\sigma} \Gamma_{\rho\nu}^\sigma + \eta_{\nu\sigma} \Gamma_{\rho\mu}^\sigma - \eta_{\mu\nu} \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \right) - \eta_{\mu\sigma} f_\nu^\lambda \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma - \eta_{\nu\sigma} f_\mu^\lambda \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma + f_{\mu\nu} \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda$$

Aus dieser Beziehung folgen durch Ableitung nach ρ die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-\partial_\rho \partial^\rho f_{\mu\nu} &= \frac{1}{\kappa} \left(\underbrace{-\eta_{\mu\sigma} \partial^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma}_a - \eta_{\nu\sigma} \partial^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\sigma + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \right)_c \\
&\quad + \partial^\rho \left(+\eta_{\mu\sigma} f_\nu^\lambda \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma + \eta_{\nu\sigma} f_\mu^\lambda \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma - f_{\mu\nu} \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \right) \\
\partial_\mu \partial^\rho f_{\rho\nu} &= \frac{1}{\kappa} \left(\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \eta_{\nu\sigma} \partial^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \right) \\
&\quad + \partial^\rho \left(-\eta_{\rho\sigma} f_\nu^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma - \eta_{\nu\sigma} f_\mu^\lambda \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma + f_{\rho\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \right) \\
\partial_\nu \partial^\rho f_{\rho\mu} &= \frac{1}{\kappa} \left(\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \eta_{\mu\sigma} \partial^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda \right) \\
&\quad + \partial^\rho \left(-\eta_{\rho\sigma} f_\mu^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma - \eta_{\mu\sigma} f_\rho^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma + f_{\rho\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda \right) \\
\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial_\rho f &= \underbrace{-\frac{1}{\kappa} \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda}_c + \partial^\rho \left(-\eta_{\mu\nu} f_\sigma^\lambda \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} f \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \right)
\end{aligned}$$

Dabei wurden zur Gewinnung der zweiten Gleichung die Indizes $\rho - \mu$ und bei der dritten Gleichung die Indizes $\rho - \nu$ vertauscht. Addition dieser vier Gleichungen und sorgfältiger Vergleich der Terme in den Klammern mit (3.3.15) zeigt, dass

$$2R_{\mu\nu}^L = \frac{1}{\kappa} (2\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda) - \kappa \sigma_{\mu\nu} \quad (3.5.8)$$

gilt. Ausnutzung von (3.5.5) liefert schließlich das gewünschte Ergebnis

$$R_{\mu\nu}^L = \frac{\kappa}{2} (s_{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu}) = \frac{\kappa}{2} t_{\mu\nu} \quad . \quad (3.5.9)$$

Wie zu zeigen war, ist die Quelle des Graviton-Feldes damit tatsächlich der eigene Energie-Impulsdichte-Tensor.

Kapitel 4

Graviton-Materie-Kopplung

4.1 Einführung eines neuen Spin-2 Feldes

Im Riemann-Raum wird die Dynamik des Metriktensor nach den Diskussionen in den vorherigen Kapiteln durch die Einstein-Gleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (4.1.1)$$

beschrieben, die die Selbstkopplung des Spin-2 Feldes berücksichtigt. Letzteres tritt in der Einstein-Gleichung aber gar nicht mehr auf. Die neue Feldvariable ist die Metrik $g^{\mu\nu}$.

Über den Metriktensor kann man mit dem Ansatz

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \quad (4.1.2)$$

ein neues Spin-2 Feld $h_{\mu\nu}$ einführen, dass sich allerdings trotz gleicher Bezeichnung vom Spin-2 Feld im vorherigen Kapitel unterscheidet und auch eine andere Selbstkopplung besitzt. Dieses als Repräsentation des Metriktensors zu verwenden hat den Vorteil, dass mit seiner Hilfe die Wechselwirkungsterme zwischen dem Metriktensor und den Feldern der Materie relativ einfach abgeleitet werden können. Mit diesem neuen Spin-2 Feld gilt

$$g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad \implies \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\kappa^2) \quad , \quad (4.1.3)$$

wobei natürlich $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}$ ist.

Nachstehend wird ausschließlich mit dieser Definition des Graviton-Feldes gearbeitet. Eine Verwechslungsgefahr besteht deshalb nicht.

Es ist leicht einzusehen, dass das neu eingeführte Feld tatsächlich ein Spin-2 Feld ist. In den Ricci-Tensor (3.4.10) eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} &= \frac{\kappa}{2} \eta^{\sigma\rho} \left(\partial_\sigma \partial_\mu h_{\rho\nu} - \partial_\sigma \partial_\rho h_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu h_{\rho\sigma} + \partial_\nu \partial_\rho h_{\sigma\mu} \right) + \mathcal{O}(\kappa^2) \\
 &= \frac{\kappa}{2} \left(\partial^\rho \partial_\mu h_{\rho\nu} - \partial^\rho \partial_\rho h_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu h + \partial_\nu \partial^\rho h_{\rho\mu} \right) + \mathcal{O}(\kappa^2) \\
 &= \kappa R_{\mu\nu}^L(h) + \mathcal{O}(\kappa^2)
 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu} R &= g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \left(\kappa R_{\rho\sigma}^L(h) + \mathcal{O}(\kappa^2) \right) \\
 &= \left(\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \right) \left(\eta^{\rho\sigma} - \kappa h^{\rho\sigma} + \mathcal{O}(\kappa^2) \right) \kappa R_{\rho\sigma}^L(h) + \mathcal{O}(\kappa^2) \\
 &= \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \kappa R_{\rho\sigma}^L(h) + \mathcal{O}(\kappa^2) \\
 &= \eta_{\mu\nu} \kappa R^L(h) + \mathcal{O}(\kappa^2)
 \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Die Einstein-Gleichung geht damit nach Division durch κ in die Form

$$R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^L + \mathcal{O}(\kappa) = 0 \tag{4.1.6}$$

über. In der führenden Ordnung sind dies genau die Feldgleichungen (2.4.10) des Graviton-Feldes. Da der Term $\mathcal{O}(\kappa)$ nur die Selbstwechselwirkung beschreibt, ist das Feld $h_{\mu\nu}$ ohne Selbstwechselwirkung also ebenfalls ein Spin-2 Feld. Damit kann auch hier der Wechselwirkungsterm mit den freien Materiefeldern nur

$$L_W = -\frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu} T_M^{\mu\nu} \tag{4.1.7}$$

sein. Dies erlaubt es, den Wechselwirkungsterm zwischen dem Metriktensor und den mit ihm wechselwirkenden Feldern zu gewinnen.

4.2 Die wechselwirkenden Felder

Die vollständige Wechselwirkung zwischen dem Metriktensor und der Materie lässt sich durch einen iterativen Prozess gewinnen. Nach dem Prinzip der

minimalen eichinvarianten Kopplung gilt für das Wirkungsintegral einer allgemeinen Feldvariablen F in der SRT und der ART der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} W_0 &= \int L_0(\eta_{\mu\nu}, F, \partial_\mu F) \cdot d^4x \\ &\implies W_{\text{ART}} = \int L_0(g_{\mu\nu}, F, \nabla_\mu F) \cdot \sqrt{-g} d^4x \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Diesen Zusammenhang gilt es abzuleiten. Ausgangspunkt hierfür ist das im Minkowski-Raum mit krummlinigen Koordinaten formulierte Wirkungsintegral

$$W_0(\gamma_{\mu\nu}, F, D_\mu F) = \int L_0(\gamma_{\mu\nu}, F, D_\mu F) \cdot \sqrt{-\gamma} d^4x \quad . \quad (4.2.2)$$

Die Wechselwirkung mit dem Graviton-Feld wird durch den Term

$$L_W = -\frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \implies \delta_h W_W = \int -\frac{\kappa}{2} \delta h_{\mu\nu} \cdot T^{\mu\nu} \cdot \sqrt{-\gamma} d^4x \quad (4.2.3)$$

erfasst. Mit dem metrischen Energie-Impulsdichte-Tensor der Materie

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta W(\gamma_{\mu\nu}, F, D_\mu F)}{\delta \gamma_{\mu\nu}(x)}$$

gilt dann

$$\delta_h W_W = \int \kappa \delta h_{\mu\nu}(x) \cdot \frac{\delta W(\gamma_{\mu\nu}, F, D_\mu F)}{\delta \gamma_{\mu\nu}(x)} \cdot d^4x$$

für das Wirkungsintegral der Graviton-Materie Kopplung.

Anmerkung: In der Quantenfeldtheorie ist der Energie-Impulsdichte-Tensor allerdings nicht eindeutig definiert, da eine unendliche Anzahl gleichwertiger Energie-Impulsdichte-Tensoren existiert, die sich nur durch ein Superpotential unterscheiden. Dies liegt darin begründet, dass der Energie-Impulsdichte-Tensor ohne Berücksichtigung der Gravitation keine beobachtbare Größe ist. Der Metriktensor sowie das Graviton-Feld sind symmetrische Tensoren und deshalb ist es plausibel, auch den metrischen Energie-Impulsdichte-Tensor zu verwenden, da auch dieser symmetrisch ist.

Die SRT ist in geradlinigen Koordinaten formuliert, so dass die vorstehende Graviton-Materie-Kopplung auf geradlinige Koordinaten zu übertragen ist. Der entsprechende Grenzübergang liefert einfach

$$\delta_h W_W = \int \kappa \delta h_{\mu\nu}(x) \cdot \left[\frac{\delta W(\gamma_{\mu\nu}, F, D_\mu F)}{\delta \gamma_{\mu\nu}(x)} \right]_{\gamma=\eta} \cdot d^4x \quad , \quad (4.2.4)$$

wobei es notwendig ist, die Metrik $\gamma_{\mu\nu}$ weiter als rechnerische Hilfsgröße zu verwenden, da der Metriktensor $\eta_{\mu\nu}$ grundsätzlich konstant ist und deshalb nicht variiert werden kann.

Die Beziehung (4.2.4) definiert einen iterativen Prozess zur Bestimmung des Wirkungsintegrals mit Wechselwirkung. In einem ersten Schritt wird

$$\delta_h W_1 = \int \kappa \delta h_{\mu\nu}(x_1) \cdot \left[\frac{\delta W_0(\gamma_{\mu\nu}, F, D_\mu F)}{\delta \gamma_{\mu\nu}(x_1)} \right]_{\gamma=\eta} \cdot d^4 x_1 \quad (4.2.5)$$

und, da W_0 nicht vom Graviton-Feld abhängt, nach funktionaler Integration

$$W_1 = \int \kappa h_{\mu\nu}(x_1) \cdot \left[\frac{\delta W_0(\gamma_{\mu\nu}, F, D_\mu F)}{\delta \gamma_{\mu\nu}(x_1)} \right]_{\gamma=\eta} \cdot d^4 x_1 \quad . \quad (4.2.6)$$

Bei Berücksichtigung dieses Terms wird der Teil des Wirkungsintegrals, in welchem das Materiefeld F auftritt, dann

$$W_F^{(1)} = W_0 + W_1 \quad . \quad (4.2.7)$$

Konsequenterweise muss nach (4.2.4) aus Gründen der Konsistenz der Wechselwirkungsanteil des Wirkungsintegrals aus dem Wirkungsintegral $W_F^{(1)}$ berechnet werden. Dies ist plausibel, da sich durch die Wechselwirkung der Energie-Impulsdichte-Tensor der Materie natürlich verändert. Mit

$$\begin{aligned} \delta_h W_2 &= \int \kappa \delta h_{\rho\sigma}(x_2) \cdot \left[\frac{\delta W_1}{\delta \gamma_{\rho\sigma}(x_2)} \right]_{\gamma=\eta} \cdot d^4 x_2 \\ &= \int \kappa^2 h_{\mu\nu}(x_1) \delta h_{\rho\sigma}(x_2) \cdot \left[\frac{\delta^2 W_0(\gamma_{\mu\nu}, F, D_\mu F)}{\delta \gamma_{\mu\nu}(x_1) \delta \gamma_{\rho\sigma}(x_2)} \right]_{\gamma=\eta} \cdot d^4 x_1 d^4 x_2 \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

bzw. nach abermaliger funktionaler Integration

$$W_2 = \int \frac{\kappa^2}{2} h_{\mu\nu}(x_1) h_{\rho\sigma}(x_2) \cdot \left[\frac{\delta^2 W_0(\gamma_{\mu\nu}, F, D_\mu F)}{\delta \gamma_{\mu\nu}(x_1) \delta \gamma_{\rho\sigma}(x_2)} \right]_{\gamma=\eta} \cdot d^4 x_1 d^4 x_2 \quad (4.2.9)$$

ergibt sich ein weiterer Term

$$W_F^{(2)} = W_F^{(1)} + W_2 = W_0 + W_1 + W_2 \quad (4.2.10)$$

im Wirkungsintegral. Es ist offensichtlich, dass diese Iteration fortgeführt werden muss, da der neue Term ebenfalls zum Wechselwirkungsteil des Wirkungsintegrals beiträgt. Führt man diese Iterationen bis ins Unendliche fort, erhält man schließlich das endgültige Wirkungsintegral:

$$W_F^{(\infty)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \cdot h_{\mu\nu}(x_1) \cdots h_{\rho\sigma}(x_n) \cdot \left[\frac{\delta^n W_0(\gamma_{\mu\nu}, F, D_\mu F)}{\delta\gamma_{\mu\nu}(x_1) \cdots \delta\gamma_{\rho\sigma}(x_n)} \right]_{\gamma=\eta} \quad (4.2.11)$$

Die rechte Seite dieser Beziehung ist nun aber nichts anderes als die funktionale Taylor-Entwicklung von

$$\begin{aligned} W_F^{(\infty)} &= W_0(\gamma_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, F, D_\mu^{(\gamma+\kappa h)} F) \Big|_{\gamma=\eta} \\ &= W_0(\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, F, D_\mu^{(\eta+\kappa h)} F) \\ &= \int L_0(\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, F, D_\mu^{(\eta+\kappa h)} F) \cdot \sqrt{-(\eta + \kappa h)} d^4x \quad . \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Vergleich mit (4.2.1) liefert schließlich die Identifikation

$$W_{\text{ART}} = W_F^{(\infty)} \quad \text{für} \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \quad . \quad (4.2.13)$$

Damit haben sich der erwartete Zusammenhang zwischen dem Metriktensor $g_{\mu\nu}$ und dem Graviton-Feld $h_{\mu\nu}$ sowie das Wirkungsintegral für die Materie in Abhängigkeit vom Metriktensor ergeben.

4.3 Übergang zu Operatoren

Die Quantentheorie des Gravitons ist eine konsistente Theorie der Quanten-Gravitation, die mit allen experimentell zugänglichen Daten sowie allen Beobachtungsdaten übereinstimmt. Ausgangspunkt ist das Wirkungsintegral

$$W = \int \left({}^3L_h - \frac{\kappa}{2} \cdot T_{\mu\nu}^M h^{\mu\nu} + L_0(\eta^{\mu\nu}, F, \partial_\mu F) \right) d^4x \quad . \quad (4.3.1)$$

Dabei ist

$${}^3L_h = \frac{1}{2} \left(R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^L \right) h^{\mu\nu} \quad (4.3.2)$$

der Lagrange-Skalar des Graviton-Feldes, $T_{\mu\nu}^M$ der Energie-Impulsdichte-Tensor der Materiefelder und L_0 der freie Lagrange-Skalar der Materiefelder. Unter Berücksichtigung der Selbstkopplung des Graviton-Feldes und der iterativen Änderung des Teils des Wirkungsintegrals in dem Materiefelder auftreten folgt mit $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ das vervollständigte Wirkungsintegral

$$W = \int \left(-\frac{1}{\kappa^2} R(g_{\mu\nu}) + L_0(g^{\mu\nu}, F, \nabla_\mu F) \right) \cdot \sqrt{-g} \, d^4x \quad . \quad (4.3.3)$$

Zur Beschreibung der gravitativen Wechselwirkung zwischen zwei neutralen Skalarfeldern ist dann die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} L_0^{\phi_1; \phi_2} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_1 \partial_\nu \phi_1 - \frac{1}{2} m_1^2 \phi_1^2 \right) \\ + \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_2 \partial_\nu \phi_2 - \frac{1}{2} m_2^2 \phi_2^2 \right) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

und für die gravitative Wechselwirkung zwischen einem Photonfeld in der Lorentz-Eichung und einem neutralen Skalarfeld die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} L_0^{\gamma; \phi} = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu A_\nu)^2 \right) \\ + \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 \right) \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

mit $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ zu verwenden. Durch den Übergang

$$g_{\mu\nu} \quad \longrightarrow \quad \hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa \hat{h}_{\mu\nu} \quad . \quad (4.3.6)$$

wird der zum Spin-2 Feld gehörige Feldoperator $\hat{h}_{\mu\nu}$ eingeführt. Dabei sind die Beziehungen

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa \hat{h}^{\mu\nu} + \kappa^2 \eta_{\rho\sigma} \hat{h}^{\mu\rho} \hat{h}^{\nu\sigma} + \mathcal{O}(\kappa^3) \quad (4.3.7)$$

$$\sqrt{-\hat{g}} = 1 + \frac{\kappa}{2} \eta^{\mu\nu} \hat{h}_{\mu\nu} + \frac{\kappa^2}{8} \left((\eta^{\mu\nu} \hat{h}_{\mu\nu})^2 - 2 \hat{h}_{\mu\nu} \hat{h}^{\mu\nu} \right) + \mathcal{O}(\kappa^3) \quad . \quad (4.3.8)$$

zu beachten. Damit sind die modellabhängigen Zusammenhänge zur Ableitung der Feynman-Regeln gegeben.

4.4 Der 2-Skalar-1-Graviton Vertex

Ausgangspunkt zur Bestimmung des 2-Skalar-1-Graviton Vertex ist die auf Operatoren umgeschriebene Lagrange-Dichte des Skalarfeldes

$$\sqrt{-\hat{g}} L_0^\phi = \sqrt{-\hat{g}} \left(\frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{\phi} \partial_\nu \hat{\phi} - \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 \right) \quad . \quad (4.4.1)$$

Der Wechselwirkungsterm zwischen Skalarfeld und Graviton ergibt sich durch das Einsetzen der Beziehungen (4.3.7) und (4.3.8). Damit sind die relevanten in κ linearen Terme:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\kappa; \sqrt{-\hat{g}} L_0^\phi) &= \frac{\kappa}{4} \eta^{\alpha\beta} \hat{h}_{\alpha\beta} \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{\phi} \partial_\nu \hat{\phi} - m^2 \hat{\phi}^2 \right) - \frac{\kappa}{2} \hat{h}^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{\phi} \partial_\nu \hat{\phi} \\ &= \frac{\kappa}{4} \eta^{\alpha\beta} \hat{h}_{\alpha\beta} \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{\phi} \partial_\nu \hat{\phi} - m^2 \hat{\phi}^2 \right) - \frac{\kappa}{4} \hat{h}^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \hat{\phi} \partial_\nu \hat{\phi} + \partial_\nu \hat{\phi} \partial_\mu \hat{\phi} \right) \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Symmetrie bei Vertauschung der Indizes des Gravitons ausgenutzt. Anpassung der Indizes liefert:

$$= \frac{\kappa}{4} \eta^{\alpha\beta} \hat{h}_{\alpha\beta} \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{\phi} \partial_\nu \hat{\phi} - m^2 \hat{\phi}^2 \right) - \frac{\kappa}{4} \hat{h}_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} \left(\partial_\mu \hat{\phi} \partial_\nu \hat{\phi} + \partial_\nu \hat{\phi} \partial_\mu \hat{\phi} \right)$$

Der Übergang zum gesuchten Vertexfaktor



erfolgt nun im Impulsraum durch die Schritte:

- Ersetzen von $\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ durch $2(ip'_\mu)(-ip_\nu) = 2p'_\mu p_\nu$.
- Ersetzen von $\hat{\phi}^2$ durch den Faktor 2, da das Skalarfeld reell ist.
- Ersetzen von $\hat{\phi}$, $\hat{h}_{\alpha\beta}$ durch den Faktor 1 und Symmetrisierung über $\alpha\beta$.
- Multiplikation mit dem Faktor $(+i)$, da die Herleitung aus einer Lagrange-Dichte erfolgt.

Diese Schritte zusammen liefern schließlich den gesuchten Vertexfaktor

$$\begin{aligned}
 \tau_1^{\alpha\beta}(p, p', m) &= \frac{i\kappa}{4} \eta^{\alpha\beta} \left(\eta^{\mu\nu} \cdot 2p'_\mu p_\nu - 2m^2 \right) \\
 &\quad - \frac{i\kappa}{8} \left(\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\beta\mu} \eta^{\alpha\nu} \right) \left(2p'_\mu p_\nu + 2p'_\nu p_\mu \right) \\
 &= \frac{i\kappa}{2} \eta^{\alpha\beta} \left[(p' \cdot p) - m^2 \right] \\
 &\quad - \frac{i\kappa}{4} \left(p'^\alpha p^\beta + p'^\beta p^\alpha + p'^\beta p^\alpha + p'^\alpha p^\beta \right) \\
 &= \frac{-i\kappa}{2} \left(p^\alpha p'^\beta + p^\beta p'^\alpha - \eta^{\alpha\beta} [(p \cdot p') - m^2] \right) \tag{4.4.2}
 \end{aligned}$$

für die Wechselwirkung zwischen skalaren Teilchen und dem Graviton.

4.5 Der 2-Photon-1-Graviton Vertex

Es wird sich zeigen, dass die Bestimmung des 2-Photon-1-Graviton Vertex wegen der vielen auftretenden Indizes unübersichtlich wird. Ausgangspunkt ist die auf Operatoren umgeschriebene Lagrange-Dichte (4.3.5):

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-\hat{g}} L_0^\gamma &= -\frac{1}{4} \sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\mu\rho} \hat{g}^{\nu\sigma} (\partial_\rho \hat{A}_\sigma - \partial_\sigma \hat{A}_\rho) (\partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{g}^{\rho\sigma} \partial_\mu \hat{A}_\nu \partial_\rho \hat{A}_\sigma \tag{4.5.1}
 \end{aligned}$$

Der Wechselwirkungsterm zwischen Photon und Graviton ergibt sich durch das Einsetzen der Beziehungen (4.3.7) und (4.3.8). Der Eichterm liefert in der linearen Ordnung von κ keinen Beitrag zur Wechselwirkung, weil immer ein Lorentz-Term übrig bleibt und in der Lorentz-Eichung für alle physikalisch zulässigen Zustände

$$\langle \eta_{phy} | \nabla^\mu \hat{A}_\mu | \eta_{phy} \rangle = 0 \tag{4.5.2}$$

gilt.

Damit sind die für den 2-Photon-1-Graviton Vertex in κ relevanten linearen Terme

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{O}(\kappa; \sqrt{-\hat{g}} L_0^\gamma) \\
 &= -\frac{\kappa}{8} \eta^{\alpha\beta} \hat{h}_{\alpha\beta} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \left(\partial_\rho \hat{A}_\sigma \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\sigma \hat{A}_\rho \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\rho \hat{A}_\sigma \partial_\nu \hat{A}_\mu + \partial_\sigma \hat{A}_\rho \partial_\nu \hat{A}_\mu \right) \\
 &\quad + \frac{\kappa}{4} \hat{h}^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \left(\partial_\rho \hat{A}_\sigma \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\sigma \hat{A}_\rho \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\rho \hat{A}_\sigma \partial_\nu \hat{A}_\mu + \partial_\sigma \hat{A}_\rho \partial_\nu \hat{A}_\mu \right) \\
 &\quad + \frac{\kappa}{4} \eta^{\mu\rho} \hat{h}^{\nu\sigma} \left(\partial_\rho \hat{A}_\sigma \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\sigma \hat{A}_\rho \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\rho \hat{A}_\sigma \partial_\nu \hat{A}_\mu + \partial_\sigma \hat{A}_\rho \partial_\nu \hat{A}_\mu \right) \\
 &= -\frac{\kappa}{4} \eta^{\alpha\beta} \hat{h}_{\alpha\beta} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \left(\partial_\rho \hat{A}_\sigma \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\sigma \hat{A}_\rho \partial_\mu \hat{A}_\nu \right) \\
 &\quad + \frac{\kappa}{2} \hat{h}^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \left(\partial_\rho \hat{A}_\sigma \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\sigma \hat{A}_\rho \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\rho \hat{A}_\sigma \partial_\nu \hat{A}_\mu + \partial_\sigma \hat{A}_\rho \partial_\nu \hat{A}_\mu \right).
 \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Symmetrie bei gleichzeitiger Vertauschung der Indizes $\mu \leftrightarrow \nu$ und $\rho \leftrightarrow \sigma$ ausgenutzt. Anpassung der Indizes liefert:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\kappa}{4} \left(-\eta^{\mu\nu} \hat{h}_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} \eta^{\gamma\delta} \partial_\rho \hat{A}_\delta \partial_\sigma \hat{A}_\gamma + \eta^{\mu\nu} \hat{h}_{\mu\nu} \eta^{\rho\delta} \eta^{\gamma\sigma} \partial_\sigma \hat{A}_\delta \partial_\rho \hat{A}_\gamma \right) \\
 &\quad + \frac{\kappa}{2} \left(\hat{h}_{\mu\nu} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \eta^{\gamma\delta} \partial_\sigma \hat{A}_\delta \partial_\rho \hat{A}_\gamma - \hat{h}_{\mu\nu} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\delta} \eta^{\gamma\sigma} \partial_\sigma \hat{A}_\delta \partial_\rho \hat{A}_\gamma \right. \\
 &\quad \left. - \hat{h}_{\mu\nu} \eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\rho} \eta^{\sigma\delta} \partial_\rho \hat{A}_\delta \partial_\sigma \hat{A}_\gamma + \hat{h}_{\mu\nu} \eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\delta} \eta^{\rho\sigma} \partial_\sigma \hat{A}_\delta \partial_\rho \hat{A}_\gamma \right)
 \end{aligned}$$

Der Übergang zum gesuchten Vertexfaktor



$$\tau_2^{\mu\nu\gamma\delta}(k, k')$$

erfolgt nun im Impulsraum durch die Schritte:

- Ersetzen von $\partial_\alpha \hat{A}_\delta \partial_\beta \hat{A}_\gamma$ durch $2(ik'_\alpha)(-ik_\beta) = 2k'_\alpha k_\beta$.
- Ersetzen von $\hat{A}_\delta, \hat{A}_\gamma, \hat{h}_{\mu\nu}$ durch den Faktor 1 und Symmetrisierung über $\mu\nu$.
- Multiplikation mit dem Faktor $(+i)$, da die Herleitung aus einer Lagrange-Dichte erfolgt.

Diese Schritte zusammen liefern schließlich den gesuchten Vertexfaktor:

$$\begin{aligned}
\tau_2^{\mu\nu\gamma\delta}(k, k') &= \frac{i\kappa}{4} \left(-\eta^{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}\eta^{\gamma\delta} \cdot 2k'_\rho k_\sigma + \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\delta}\eta^{\gamma\sigma} \cdot 2k'_\sigma k_\rho \right) \\
&\quad + \frac{i\kappa}{2} \left(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}\eta^{\gamma\delta} \cdot 2k'_\sigma k_\rho - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\delta}\eta^{\gamma\sigma} \cdot 2k'_\sigma k_\rho \right. \\
&\quad \quad \left. - \eta^{\mu\gamma}\eta^{\nu\rho}\eta^{\sigma\delta} \cdot 2k'_\rho k_\sigma + \eta^{\mu\gamma}\eta^{\nu\delta}\eta^{\rho\sigma} \cdot 2k'_\sigma k_\rho \right)_{\mu\leftrightarrow\nu} \\
&= \frac{i\kappa}{2} \left(-\eta^{\mu\nu}\eta^{\gamma\delta}(k' \cdot k) + \eta^{\mu\nu}k'^\gamma k^\delta \right) \\
&\quad + ik \left(\eta^{\gamma\delta}k'^\nu k^\mu - \eta^{\nu\delta}k'^\gamma k^\mu \right. \\
&\quad \quad \left. - \eta^{\mu\gamma}k'^\nu k^\delta + \eta^{\mu\gamma}\eta^{\nu\delta}(k' \cdot k) \right)_{\mu\leftrightarrow\nu} \\
&= \frac{i\kappa}{2} \cdot \left\{ \left(\eta^{\mu\gamma}\eta^{\nu\delta} + \eta^{\nu\gamma}\eta^{\mu\delta} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\gamma\delta} \right) (k' \cdot k) \right. \\
&\quad + \eta^{\mu\nu}k'^\gamma k^\delta + \eta^{\gamma\delta} \left(k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu \right) \\
&\quad \quad \left. - \left(\eta^{\mu\delta}k'^\gamma k^\nu + \eta^{\nu\delta}k'^\gamma k^\mu + \eta^{\nu\gamma}k'^\mu k^\delta + \eta^{\mu\gamma}k'^\nu k^\delta \right) \right\}
\end{aligned}$$

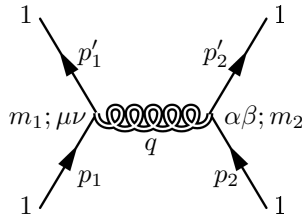
Die vorstehenden Ausführungen zeigen, dass Rechnungen in höherer Ordnung von κ aufgrund der entstehenden vielen Terme und der dann extrem vielen Indizes sehr unübersichtlich werden. Darum gewinnt man diese üblicherweise mit der Hilfe von spezialisierten Algebra-Programmen.

Kapitel 5

Störungsrechnungen

5.1 Das Gravitationsgesetz

Das Newton-Potential entsteht durch den Austausch von Gravitonen und lässt sich aus dem Feynman-Diagramm



gewinnen. Die Feynman-Regeln (siehe „Das Standardmodell der Teilchenphysik“ sowie „Die Allgemeine Relativitätstheorie“) zur Berechnung des vorstehenden Feynman-Diagramms sind:

- jedes einlaufende skalare Teilchen liefert einen Faktor 1
- jedes auslaufende skalare Teilchen liefert einen Faktor 1
- jede innere Linie eines Gravitons liefert einen Faktor

$$iD^{\mu\nu\alpha\beta}(q^2) = \frac{iP^{\mu\nu\alpha\beta}}{q^2}$$

- jeder 2-Skalar-1-Graviton Vertex liefert einen Faktor

$$\tau_1^{\alpha\beta}(p, p', m) = \frac{-i\kappa}{2} \left(p^\alpha p'^\beta + p^\beta p'^\alpha - \eta^{\alpha\beta} [(p \cdot p') - m^2] \right)$$

Dabei ist der Term

$$P^{\mu\nu\alpha\beta} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \quad (5.1.1)$$

die sogenannte Polarisationssumme. Da ein Graviton nur einen sehr kleinen Impulsübertrag liefert, gilt

$$p^\rho \simeq m \eta^{\rho 0}, \quad p'^\rho \simeq m \eta^{\rho 0} \quad \text{sowie} \quad p \cdot p' \simeq m^2 \quad . \quad (5.1.2)$$

Mit diesen Approximationen wird

$$\begin{aligned} \tau_1^{\alpha\beta}(p, p', m) &\simeq \frac{-i\kappa}{2} \left(m \eta^{\alpha 0} m \eta^{\beta 0} + m \eta^{\beta 0} m \eta^{\alpha 0} - \eta^{\alpha\beta} \cdot 0 \right) \\ &= -i\kappa m^2 \eta^{\alpha 0} \eta^{\beta 0} \quad . \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Dies führt zu der Feynman-Amplitude

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= 1 \cdot \tau_1^{\mu\nu}(p_1, p'_1, m_1) \cdot 1 \cdot iD_{\mu\nu\alpha\beta} \cdot 1 \cdot \tau_1^{\alpha\beta}(p_2, p'_2, m_2) \cdot 1 \\ &\simeq (-i\kappa m_1^2) \cdot iD_{0000} \cdot (-i\kappa m_2^2) \\ &= -i \cdot m_1 m_2 \cdot \frac{\kappa^2}{4} \cdot \frac{2m_1 \cdot 2m_2}{q^2} \quad . \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Wegen dem sehr kleinen Impulsübertrag ist zudem

$$\begin{aligned} q^2 &= (p - p')_\mu (p - p')^\mu = \left(\sqrt{m^2 + |\vec{q}|^2} - m \right)^2 - |\vec{q}|^2 \\ &\simeq \left(m \left(1 + \frac{|\vec{q}|^2}{2m^2} \right) - m \right)^2 - |\vec{q}|^2 \\ &\simeq \frac{|\vec{q}|^4}{4m^2} - |\vec{q}|^2 \simeq -|\vec{q}|^2 \quad ; \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

d.h. die Änderung der Energie ist vernachlässigbar klein von zweiter Ordnung. Mit $\kappa^2 = 16\pi G$ folgt in der Born-Approximation schließlich das Potential

$$\begin{aligned} V(m_1, m_2) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{i\mathcal{M}_1}{2m_1 \cdot 2m_2} \cdot e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3q \\ &= -\frac{\kappa^2}{4} \cdot m_1 m_2 \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{|\vec{q}|^2} d^3q = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{r} \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

des Newtonschen Gravitationsgesetzes.

5.2 Die gravitative Rotverschiebung

Die Rotverschiebung eines Photons ist nicht durch sein eigenes Verhalten im Gravitationsfeld zu erklären, denn für das Photon ist eine potentielle Energie nicht definierbar. Die Rotverschiebung ergibt sich in der hier betrachteten Näherung über den Emissions- und Absorptionsprozess des Photons. Ausgangspunkt der Überlegungen ist dabei, dass man einem Teilchen mit Masse im Gravitationsfeld (5.1.6) eine nach unten verschobene Ruheenergie

$$E_0 = mc^2 + V(m, M) = mc^2 \left(1 - \frac{GM}{c^2 r} \right) \quad (5.2.1)$$

zuordnen kann, wobei wieder SI-Einheiten verwendet wurden. Emittiert ein Atom A am Ort r ein Photon, das dann später vom Atom B außerhalb des Gravitationsfeldes absorbiert wird, dann verändern sich die inneren Energien und damit die Massen der Atome um die jeweilige Bindungsenergie

$$\text{Emission: } m \longrightarrow m - \omega_a/c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 \Delta m = -\omega_a \quad (5.2.2)$$

$$\text{Absorption: } m \longrightarrow m + \omega_b/c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 \Delta m = +\omega_b \quad . \quad (5.2.3)$$

Die Energieerhaltung bei dem Gesamtprozess erfordert

$$\Delta E_a + \Delta E_b = c^2 \Delta m|_{\text{Em.}} \left(1 - \frac{GM}{c^2 r} \right) + c^2 \Delta m|_{\text{Abs.}} \left(1 - \frac{GM}{c^2 \infty} \right) = 0 \quad ,$$

woraus mit den beiden vorstehenden Beziehungen die Rotverschiebung

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = 1 - \frac{GM}{c^2 r} \quad (5.2.4)$$

folgt, was für $r \gg 2GM$ wiederum mit dem Ergebnis der ART übereinstimmt.

5.3 Die Perihelverschiebung des Merkurs

Weitere Feynman-Diagramme höherer Ordnung führen zu entsprechenden Korrekturen. Für die Berechnung der 1-Schleifen Diagramme sind die recht komplizierten Feynman-Regeln betreffend

- dem 2-Skalar-2-Graviton Vertex sowie
- dem 3-Graviton Vertex

zusätzlich zu berücksichtigen.

Die entsprechenden Korrekturen ergeben sich aus

- zwei „vacuum-polarization“ Diagrammen,
- einem „double-seagull“ Diagramm,
- zwei „triangle“ Diagrammen,
- vier „vertex-correction“ Diagrammen sowie
- zwei „box“ Diagrammen.

Als Ergebnis der zugehörigen Rechnungen ergibt sich der Korrekturterm

$$V_{\text{korr}}(m_1, m_2) = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{r} \left(3 \cdot \frac{G(m_1 + m_2)}{c^2 r} + \frac{41}{10\pi} \cdot \frac{G\hbar}{c^3 r^2} \right) \quad (5.3.1)$$

zum Newton-Potential, wobei jetzt SI-Einheiten verwendet werden. Für Details siehe [Akh08, Fal08]. Der Korrekturterm besitzt einen klassischen Anteil sowie einen quantenmechanischen Anteil. Der klassische Anteil kann den berühmten Beitrag der ART zur Perihelverschiebung des Merkurs schon erklären. Dies ist leicht einzusehen. Im Folgenden wird dabei der Merkur durch ein elektrisch neutrales Skalarfeld der Masse m und die Sonne durch ein elektrisch neutrales Skalarfeld der Masse M repräsentiert. Ausgehend von der Lagrange-Funktion $L = T - V$ für den Merkur in Polarkoordinaten seiner Bahnebene

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \right) = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) + \frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \right) \quad (5.3.2)$$

mit $\alpha = GmM$ sowie $R = 3G(M + m)/c^2 \simeq 3GM/c^2$ folgen aus den Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (5.3.3)$$

die Beziehungen

$$\text{für } \phi \quad -m \frac{d}{dt} \left(r^2 \dot{\phi} \right) = 0 \quad (5.3.4)$$

$$\text{und für } r \quad m \left(r \dot{\phi}^2 - \ddot{r} \right) - \frac{\alpha}{r^2} \left(1 + \frac{2R}{r} \right) = 0 \quad (5.3.5)$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass der Bahndrehimpuls

$$\ell = m r^2 \dot{\phi} \quad (5.3.6)$$

des Merkurs eine Konstante seiner Bahnbewegung ist. Dies in die zweite mit r^2 multiplizierte Gleichung eingesetzt liefert

$$m \left(\frac{\ell^2}{m^2 r} - r^2 \ddot{r} \right) = \alpha \left(1 + \frac{2R}{r} \right) \quad . \quad (5.3.7)$$

Nun ergibt sich mit

$$u = \frac{1}{r} \quad \text{sowie} \quad \frac{d}{dt} = \dot{\phi} \frac{d}{d\phi} = \frac{\ell}{mr^2} \frac{d}{d\phi} \quad (5.3.8)$$

für den Term

$$r^2 \ddot{r} = r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) \right) = \frac{\ell}{m} \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{\ell}{mr^2 u^2} \frac{du}{d\phi} \right) = -\frac{\ell^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\phi^2} \quad . \quad (5.3.9)$$

Dies in (5.3.7) eingesetzt ergibt

$$m \left(\frac{\ell^2}{m^2} u + \frac{\ell^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\phi^2} \right) = \alpha (1 + 2Ru) \quad (5.3.10)$$

bzw. nach kurzer Umformung

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + \left(1 - \frac{2\alpha m R}{\ell^2} \right) u = \frac{\alpha m}{\ell^2} \quad . \quad (5.3.11)$$

Mit zweckmäßig gewählter Phase folgt dann

$$u(\phi) = u_0 \cos \left(\phi \sqrt{1 - \frac{2\alpha m R}{\ell^2}} \right) + \frac{\alpha m / \ell^2}{1 - 2\alpha m R / \ell^2} \quad . \quad (5.3.12)$$

Das erste Perihel ist bei $\phi = 0$ und das zweite Perihel definitionsgemäß bei

$$\phi \sqrt{1 - \frac{2\alpha m R}{\ell^2}} = 2\pi \quad \implies \quad \phi \simeq 2\pi \left(1 + \frac{\alpha m R}{\ell^2} \right) \quad . \quad (5.3.13)$$

Für eine elliptische Bahn eines Planeten mit dem mittleren Abstand a zur Sonne und der Exzentrizität e ist nun der Bahndrehimpuls

$$\ell = m \sqrt{GM a (1 - e^2)} \quad . \quad (5.3.14)$$

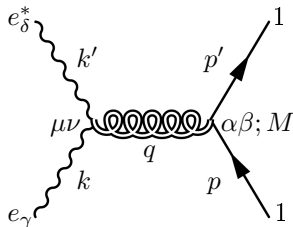
Dies ausnutzend folgt für die Geschwindigkeit der Perihelverschiebung

$$\frac{\delta\phi}{T_{\text{orbit}}} \simeq \frac{2\pi}{T_{\text{orbit}}} \cdot \frac{\alpha m R}{\ell^2} = \frac{6\pi}{T_{\text{orbit}}} \left(\frac{GMm}{c\ell} \right)^2 = \frac{6\pi GM}{c^2 T_{\text{orbit}} a (1 - e^2)} \quad . \quad (5.3.15)$$

Einsetzen der für den Merkur spezifischen Werte $\bar{T}_{\text{orbit}} = 0.241$ Jahre sowie $a = 57.9 \cdot 10^6$ km und $e = 0.206$ liefert dann $43''$ pro Jahrhundert. Dieser Wert stimmt mit dem der vollen ART überein.

5.4 Die Lichtablenkung

Die Lichtablenkung im Gravitationsfeld wird auf der Baumebene durch das Feynman-Diagramm



dargestellt. Die zusätzlichen Feynman-Regeln zur Berechnung des Feynman-Diagramms sind:

- jedes einlaufende Photon liefert einen Faktor $e_\gamma(\vec{k}, \lambda)$
- jedes auslaufende Photon liefert einen Faktor $e_\delta^*(\vec{k}, \lambda)$
- jeder 2-Photon-1-Graviton Vertex liefert einen Faktor

$$\begin{aligned} \tau_2^{\mu\nu\gamma\delta}(k, k') = \frac{i\kappa}{2} \cdot \left\{ \left(\eta^{\mu\gamma}\eta^{\nu\delta} + \eta^{\mu\delta}\eta^{\nu\gamma} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\gamma\delta} \right) (k \cdot k') \right. \\ \left. + \eta^{\mu\nu}k^\delta k'^\gamma + \eta^{\gamma\delta} \left(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu \right) \right. \\ \left. - \left(\eta^{\mu\delta}k'^\gamma k^\nu + \eta^{\nu\delta}k'^\gamma k^\mu + \eta^{\nu\gamma}k'^\mu k^\delta + \eta^{\mu\gamma}k'^\nu k^\delta \right) \right\} \end{aligned}$$

Daraus folgt für das Baumdiagramm die Feynman-Amplitude

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &= e_\gamma(\vec{k}, \lambda) \cdot \tau_2^{\mu\nu\gamma\delta}(k, k') \cdot e_\delta^*(\vec{k}', \lambda) \cdot iD_{\mu\nu\alpha\beta}(q) \cdot 1 \cdot \tau_1^{\alpha\beta}(p, p', M) \cdot 1 \\ &\simeq e_\gamma(\vec{k}, \lambda) e_\delta^*(\vec{k}', \lambda) \tau_2^{\mu\nu\gamma\delta}(k, k') iD_{\mu\nu 00}(q) (-i\kappa M^2) \quad , \quad (5.4.1) \end{aligned}$$

wobei wegen des sehr kleinen Impulsübertrages wieder die Approximation (5.1.3) ausgenutzt wurde. Weiter kann man in der zugrunde liegenden Lorentz-Eichung wegen diesem sehr kleinen Impulsübertrag die Approximationen

$$e_\gamma(\vec{k}, \lambda)k = 0 \quad \text{sowie} \quad e_\gamma(\vec{k}, \lambda)k' \simeq 0 \quad (5.4.2)$$

$$e_\gamma(\vec{k}', \lambda)k' = 0 \quad \text{sowie} \quad e_\gamma(\vec{k}', \lambda)k \simeq 0 \quad (5.4.3)$$

$$e^\gamma(\vec{k}, \lambda)e_\delta^*(\vec{k}', \lambda) \simeq -1 \quad \text{sowie} \quad k \cdot k' \simeq 0 \quad (5.4.4)$$

vornehmen, die zu der Vereinfachung

$$\begin{aligned} e_\gamma(\vec{k}, \lambda) e_\delta^*(\vec{k}', \lambda) \cdot \tau_2^{\mu\nu\gamma\delta}(k, k') &\simeq e_\gamma(\vec{k}, \lambda) e_\delta^*(\vec{k}', \lambda) \cdot \frac{i\kappa}{2} \left(\eta^{\gamma\delta} (k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu) \right) \\ &\simeq -\frac{i\kappa}{2} (k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu) \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

führen. Zusammen mit (5.1.5) wird die Feynman-Amplitude

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &\simeq -\frac{i\kappa}{2} (k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu) \cdot \frac{2i\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0} - i\eta_{\mu\nu}}{q^2} \cdot (-i\kappa M^2) \\ &\simeq -\frac{i\kappa}{2} (k_0 k'_0 + k_0 k'_0) \cdot \frac{2i}{-|\vec{q}|^2} \cdot (-i\kappa M^2) \\ &= i \cdot \omega M \cdot \frac{\kappa^2}{2} \cdot \frac{2\omega \cdot 2M}{|\vec{q}|^2} \quad , \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

aus der sich schließlich für die Photonen das halb-klassische Potential

$$\begin{aligned} V(\gamma, M) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{i\mathcal{M}_2}{2\omega \cdot 2M} \cdot e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3q \\ &= -\frac{\kappa^2}{2} \cdot \omega M \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{|\vec{q}|^2} d^3q \\ &= -2G \cdot \frac{\omega M}{r} \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

ergibt. In SI-Einheiten führt dies zu der Darstellung

$$V(\gamma, M) = -2G \cdot \frac{mM}{r} \quad , \quad (5.4.8)$$

wobei $m = \hbar\omega/c^2$ hier für die fiktive gravitative Masse eines Photons steht. Weitere Feynman-Diagramme höherer Ordnung führen zu entsprechenden Korrekturen. Bei die Berechnung in der nächsten Ordnung ist die zusätzliche Feynman-Regel betreffend

- dem 2-Photon-2-Graviton Vertex

zu berücksichtigen. Aus den 1-Schleifen Diagrammen ergibt sich in diesem Fall in SI-Einheiten der Korrekturterm

$$V_{\text{kor}}(\gamma, M) = -\frac{15}{4} \frac{G^2 M^2 m}{c^2 r^2} + f(r/r_0) \frac{G^2 M m \hbar}{c^3 r^3} \quad (5.4.9)$$

für das halb-klassische Potential der Photonen. Für Details zur Rechnung siehe [Bai17, Bje17]. Mit dem analogen Vorgehen wie bei der Berechnung der Perihelverschiebung ergibt sich für das Photon bei Vernachlässigung des unwesentlichen quantenmechanischen Anteils die halb-klassische Bahngleichung

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + (1 - 2\beta)u = \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{2GMm^2}{\ell^2}; \quad \beta = \frac{15G^2 M^2 m^2}{4c^2 \ell^2} \quad (5.4.10)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u = a \sin \varphi + b \cos \varphi + \frac{\alpha}{1 - 2\beta} \quad \text{mit} \quad \varphi = \phi \sqrt{1 - 2\beta} + \pi\beta \quad , \quad (5.4.11)$$

wobei zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen die Phase $\pi\beta$ eingeführt wurde. Da das Potential nur bis zur Ordnung G^2 entwickelt wurde, sind in den weiteren Überlegungen auch nur Terme bis zur Ordnung G^2 zu berücksichtigen. Die Bahngleichung vereinfacht sich damit zu

$$u \simeq a \sin(\phi - \phi\beta + \pi\beta) + b \cos(\phi - \phi\beta + \pi\beta) + \alpha \quad . \quad (5.4.12)$$

Jetzt soll der Fall betrachtet werden, dass die Sonne als sehr große Masse M sich im Koordinatenursprung befindet und das Photon parallel zur x-Achse entlang der Geraden $y = D$ einläuft. Dann gilt für das Photon lange vor der Wechselwirkung für $\phi \rightarrow \pi$:

$$-c \leftarrow \dot{r} = -\frac{\ell}{m} \frac{du}{d\phi} = \frac{\ell}{m} a(1 - \beta) \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{cm}{\ell(1 - \beta)} \quad (5.4.13)$$

$$r \rightarrow \infty \quad \Longrightarrow \quad u \rightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad b = \alpha \quad . \quad (5.4.14)$$

Lange nach der Wechselwirkung ist das Photon um einen Winkel δ abgelenkt nach unten. Dies bedeutet für die Bahnparameter lange nach der Wechselwirkung

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow -\delta &\Longrightarrow r \rightarrow \infty \Longrightarrow u \rightarrow 0 \\ &\Longrightarrow a \sin(-\delta + \pi\beta) + b \cos(-\delta + \pi\beta) + \alpha \simeq 0 \quad , \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

wobei der Term $\delta\beta$ vernachlässigt wurde, da er klein von dritter Ordnung in G ist. Einsetzen der Ergebnisse für a und b sowie Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung liefert

$$-\frac{cm}{\ell}(-\delta + \pi\beta) + \alpha + \alpha \simeq 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta \simeq -\frac{2\alpha\ell}{cm} + \pi\beta \quad . \quad (5.4.16)$$

Bezogen auf den Koordinatenursprung ist der Drehimpuls des einlaufenden Teilchens nun $\ell = -mDc$. Damit folgt schließlich für die Lichtablenkung im Zentralfeld

$$\delta \simeq \frac{4GM}{c^2 D} + \frac{15\pi}{4} \frac{G^2 M^2}{c^4 D^2} \quad . \quad (5.4.17)$$

Dies entspricht wiederum dem Ergebnis aus der ART. Am Sonnenrand ist $D = 6.963 \cdot 10^8$ m, was dann zu dem bekannten Wert der Lichtablenkung von $1.75''$ führt.

5.5 Der Shapiro-Effekt

Der Shapiro-Effekt bezeichnet die Tatsache, dass ein Radarsignal (Photonen!), welches sich an einer schweren Masse (hier der Sonne) vorbei bewegt, länger unterwegs ist als es der direkten Entfernung entspricht. Ausgangspunkt für die Berechnung dieser Zeitverzögerung ist die Bahngleichung (5.4.12)

$$\begin{aligned} u &= -\frac{cm}{\ell} \sin \phi + \alpha \cos \phi + \alpha \\ &= \frac{1}{D} \left(\sin \phi + D\alpha \cos \phi + D\alpha \right) \quad , \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

wobei es ausreicht die erste Ordnung in G zu berücksichtigen; d.h. $\beta = 0$ anzunehmen. Das Photon bewegt sich dabei von $\phi_1 = \pi$ zu $\phi_2 = -\delta$. Mit

$$\vartheta = D\alpha = D \cdot \frac{2GMm^2}{\ell^2} = D \cdot \frac{2GMm^2}{(-mDc)^2} = \frac{2GM}{c^2 D} \simeq \frac{\delta}{2} \quad (5.5.2)$$

wird wegen $\vartheta \ll 1$ und $\mathcal{O}(\cos \vartheta) = 1 + \mathcal{O}(\vartheta^2)$

$$u \simeq \frac{1}{D} \left(\sin \phi + \vartheta \cos \phi + \vartheta \right) \simeq \frac{1}{D} \left(\sin(\phi + \vartheta) + \vartheta \right) \quad . \quad (5.5.3)$$

Für die weitere Rechnung ist es nun noch zweckmäßig das Koordinatensystem zu drehen (u und damit r ändern sich dabei nicht), so dass mit $\varphi = \phi + \vartheta$ die Bahnkurve symmetrisch zur y-Achse wird

$$r = \frac{1}{u} = \frac{D}{\sin \varphi + \vartheta} \quad , \quad (5.5.4)$$

wobei sich das Photon jetzt von $\varphi_1 = \pi + \vartheta$ zu $\varphi_2 = -\delta + \vartheta = -\vartheta$ bewegt. Die Weglänge auf der Bahnkurve von φ_1 zu φ_2 ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
 dw &= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \quad (-d\varphi) \\
 &= -D \cdot \sqrt{\frac{1}{(\sin \varphi + \vartheta)^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{(\sin \varphi + \vartheta)^4}} \quad d\varphi \\
 &= -\frac{D}{(\sin \varphi + \vartheta)^2} \cdot \sqrt{(\sin \varphi + \vartheta)^2 + \cos^2 \varphi} \quad d\varphi \\
 &= -\frac{D}{(\sin \varphi + \vartheta)^2} \cdot \sqrt{\sin^2 \varphi + 2\vartheta \sin \varphi + \vartheta^2 + \cos^2 \varphi} \quad d\varphi \\
 &\simeq -\frac{D(1 + \vartheta \sin \varphi)}{(\sin \varphi + \vartheta)^2} \quad d\varphi \quad .
 \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

Die bisherigen Überlegungen haben implizit angenommen, dass entlang der Bahnkurve die kinetische Energie bis zur größten Annäherung zunimmt und danach wieder abnimmt. Beim Photon ist jedoch zu beachten, dass die Lichtgeschwindigkeit nicht überschritten werden kann. Da der Lagrange-Skalar bei einem statischen Gravitationsfeld zeitunabhängig bleibt, ist die Frequenz und damit auch die Energie des Photons auf seiner Bahn eine Erhaltungsgröße. Die fiktive Masse m des Photons verändert sich also nicht, sondern aufgrund des Potentials kann sich nur der Impuls ändern. Mit der für das Photon gültigen Beziehung $p = E/c$ bedeutet dies, dass sich in dem hier verwendeten Modell mit globalen Koordinaten die Geschwindigkeit des Photons im Gravitationsfeld entsprechend

$$mc_r = p_r = \frac{E_r}{c} = \frac{mc^2 + V_r(\gamma, M)}{c} \tag{5.5.6}$$

anpassen muss. Mit (5.4.8) folgt

$$\frac{c_r}{c} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad . \tag{5.5.7}$$

Die Vorhersage auch dieses Effektes der ART war an dieser Stelle nicht unbedingt zu erwarten. Berücksichtigt man die lokale Reduzierung der Bahngeschwindigkeit, so ist offenbar

$$dw = c_r dt \quad \implies \quad dt = \frac{c}{c_r} \frac{dw}{c} \tag{5.5.8}$$

zu verwenden.

In dem hier betrachteten Anwendungsfall ist dabei wegen $\vartheta \ll 1$ die Näherung

$$\frac{c}{c_r} = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = \frac{1}{1 - D\vartheta \cdot \frac{\sin \varphi + \vartheta}{D}} \simeq 1 + \vartheta \sin \varphi \quad (5.5.9)$$

zulässig. Für die Laufzeit ergibt sich mit den vorstehenden Ergebnissen

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= -\frac{D}{c} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(1 + \vartheta \sin \varphi)^2}{(\sin \varphi + \vartheta)^2} d\varphi \\ &\simeq -\frac{D}{c} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1 + 2\vartheta \sin \varphi}{(\sin \varphi + \vartheta)^2} d\varphi \quad , \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

wobei im letzten Schritt $\vartheta \ll 1$ ausgenutzt wurde. Nun gilt für die unbestimmten Integrale (Integrationskonstanten nicht mitgeschrieben)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(\sin \varphi + \vartheta)^2} d\varphi &= -\frac{\vartheta}{(1 - \vartheta^2)^{3/2}} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \vartheta^2} + \vartheta \tan \varphi/2}{1 + \sqrt{1 - \vartheta^2} + \vartheta \tan \varphi/2} \right) \\ &\quad - \frac{\cos \varphi}{(1 - \vartheta^2)(\sin \varphi + \vartheta)} \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

sowie

$$\begin{aligned} \int \frac{2\vartheta \sin \varphi}{(\sin \varphi + \vartheta)^2} d\varphi &= +\frac{2\vartheta}{(1 - \vartheta^2)^{3/2}} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \vartheta^2} + \vartheta \tan \varphi/2}{1 + \sqrt{1 - \vartheta^2} + \vartheta \tan \varphi/2} \right) \\ &\quad + \frac{2\vartheta^2 \cos \varphi}{(1 - \vartheta^2)(\sin \varphi + \vartheta)} \quad . \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

Fasst man die Terme zusammen und nutzt wiederum $\vartheta \ll 1$ aus, hat man für das gesamte unbestimmte Integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + 2\vartheta \sin \varphi}{(\sin \varphi + \vartheta)^2} d\varphi &\simeq \vartheta \ln \left(\frac{\frac{\vartheta^2}{2} + \vartheta \tan \varphi/2}{2 + \vartheta \tan \varphi/2} \right) - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi + \vartheta} + C \\ &= \vartheta \ln \left(\frac{\frac{\vartheta}{2} + \tan \varphi/2}{1 + \frac{\vartheta}{2} \tan \varphi/2} \right) - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi + \vartheta} + \left(C + \vartheta \ln \frac{\vartheta}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

Für einen beliebigen Punkt auf der Bahnkurve gilt für $\xi \leq \pi/2$

- im Fall 1 mit $\varphi = \xi$ sowie
- im Fall 2 mit $\varphi = \pi - \xi$

für den zweiten Term

$$D \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi + \vartheta} = \frac{D}{\sin \varphi + \vartheta} \cdot (\pm \cos \xi) = \pm r \cdot \cos \xi = \pm |x| \quad , \quad (5.5.14)$$

wobei das + Zeichen für den ersten und das - Zeichen für den zweiten Fall steht. Weiter wird im Fall 1 mit $\vartheta \ll \xi \ll 1$ für den ersten Term

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\vartheta}{2} + \tan \xi/2}{1 + \frac{\vartheta}{2} \tan \xi/2} &= \frac{\frac{\vartheta}{2} + \frac{\sin \xi}{1 + \cos \xi}}{1 + \frac{\vartheta}{2} \frac{\sin \xi}{1 + \cos \xi}} \\ &= \frac{\frac{\vartheta}{2}(1 + \cos \xi) + \sin \xi}{(1 + \cos \xi) + \frac{\vartheta}{2} \sin \xi} \end{aligned}$$

und mit $1 + \cos \xi = 2(1 - \sin^2(\frac{\xi}{2}))$

$$= \frac{\vartheta(1 - \sin^2(\frac{\xi}{2})) + \sin \xi}{(1 + \cos \xi) + \frac{\vartheta}{2} \sin \xi}$$

bzw. wenn man wegen $\vartheta \ll \xi \ll 1$ die in den Summanden eine Größenordnung kleineren Terme $\vartheta \sin(*)$ vernachlässigt

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{\vartheta + \sin \xi}{(1 + \cos \xi)} = \frac{D(\vartheta + \sin \varphi)}{D(1 + \cos \xi)} \\ &= \frac{D}{r(1 + \cos \xi)} = \frac{D}{r + |x|} \quad . \quad (5.5.15) \end{aligned}$$

Im Fall 2 mit $\vartheta \ll \xi \ll 1$ wird wegen $\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\xi}{2}) = 1/\tan(\frac{\xi}{2})$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\vartheta}{2} + 1/\tan(\frac{\xi}{2})}{1 + \frac{\vartheta}{2}/\tan(\frac{\xi}{2})} &= \frac{\frac{\vartheta}{2} + \frac{1 + \cos \xi}{\sin \xi}}{1 + \frac{\vartheta}{2} \frac{1 + \cos \xi}{\sin \xi}} \\ &= \frac{\frac{\vartheta}{2} \sin \xi + (1 + \cos \xi)}{\sin \xi + \frac{\vartheta}{2}(1 + \cos \xi)} \end{aligned}$$

und mit $1 + \cos \xi = 2(1 - \sin^2(\frac{\xi}{2}))$

$$= \frac{\vartheta \sin \xi + (1 + \cos \xi)}{\sin \xi + \vartheta(1 - \sin^2(\frac{\xi}{2}))}$$

bzw. wenn man wegen $\vartheta \ll \xi \ll 1$ die in den Summanden eine Größenordnung kleineren Terme $\vartheta \sin(\ast)$ vernachlässigt und $\sin(\pi - \xi) = \sin \xi$ ausnutzt

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{(1 + \cos \xi)}{\sin \xi + \vartheta} = \frac{D(1 + \cos \xi)}{D(\sin \varphi + \vartheta)} \\ &= \frac{r(1 + \cos \xi)}{D} = \frac{r + |x|}{D} \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

Die vorstehenden Ergebnisse gesammelt liefern

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= -\frac{D}{c} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(\sin \varphi + \vartheta)^2} \\ &= -\frac{D}{c} \left(\vartheta \ln \left(\frac{\frac{\vartheta}{2} + \tan \varphi/2}{1 + \frac{\vartheta}{2} \tan \varphi/2} \right) - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi + \vartheta} \right) \Bigg|_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2} \\ &= -\frac{D}{c} \vartheta \ln \left(\frac{D}{r_2 + |x_2|} \right) + \frac{D}{c} \vartheta \ln \left(\frac{r_1 + |x_1|}{D} \right) + \frac{|x_2| + |x_1|}{c} \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

Hieraus folgt für die Zeitverzögerung schließlich

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{D\vartheta}{c} \ln \left(\frac{(r_2 + |x_2|)(r_1 + |x_1|)}{D^2} \right) \\ &= \frac{2GM}{c^3} \ln \left(\frac{(r_2 + |x_2|)(r_1 + |x_1|)}{D^2} \right) \end{aligned} \quad , \quad (5.5.18)$$

was mit dem Ergebnis der ART übereinstimmt.

Anmerkung: Die Zeitverzögerung wird in der Literatur für $D \ll r_1, r_2$ auch oft in der genäherten Form (Achtung: $x_1 < 0!$)

$$\Delta t \simeq \frac{2GM}{c^3} \ln \left(\frac{4r_2 r_1}{D^2} \right) \simeq \frac{2GM}{c^3} \ln \left(\frac{r_2 + x_2}{r_1 + x_1} \right) \quad (5.5.19)$$

angegeben. Diese Beziehung lässt sich sehr schnell gewinnen, wenn man davon ausgeht, dass wegen der sehr geringen Lichtablenkung im Gravitationsfeld die

Bahn des Photons einfach durch eine horizontale Gerade approximiert werden darf. In diesem Fall gilt

$$ds = dx \quad \Longrightarrow \quad t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{c_r} \simeq \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) dx \quad . \quad (5.5.20)$$

Mit $r = \sqrt{x^2 + D^2}$ liefert die Integration

$$t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{c} + \frac{2GM}{c^3} \left(\ln(r_2 + x_2) - \ln(r_1 + x_1) \right) \quad , \quad (5.5.21)$$

was der obigen Beziehung entspricht.

Es soll noch das Ergebnis (5.5.7) der Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Gravitationsfeld mit dem Wert aus der ART verglichen werden. Hierfür reicht es aus, eine radiale Bewegung in der Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (5.5.22)$$

zu betrachten. Bei der radialen Bewegung ist $d\theta = d\varphi = 0$ und für Photonen gilt $ds^2 = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^{-1} dr^2 &= 0 \\ \Longrightarrow \quad \frac{c_r}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dr}{dt} = 1 - \frac{R_s}{r} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad , \quad (5.5.23) \end{aligned}$$

was mit der Beziehung (5.5.7) übereinstimmt.

5.6 Abschließende Anmerkung

Die Feynman-Diagramme bei den verschiedenen Berechnungen wurden nur bis zu einer Schleife ausgewertet. Will man Feynman-Diagramme mit mehr als einer Schleife berücksichtigen, so können bei deren Auswertung Divergenzen auftreten; d.h. die Graviton Theorie ist nicht renormierbar. Die weitere Auswertung hat deshalb im Kontext einer effektiven Feldtheorie zu erfolgen. Dies schränkt ihre Anwendbarkeit auf einen Energiebereich ein, der klein gegen die Planck-Energie ist.

Literaturverzeichnis

- [Akh08] **A.Akhundov; A.Shiekh**
A Review of the Leading Quantum Corrections to Newtonian Gravity
EJTP 5, No.17 (2008) 1-16
Electronic Journal of Theoretical Physics; 2008
- [Ald17] **F.Aldabe**
The standard model coupled to gravitodynamics
Eur. Phys. J. C (2017) 77:4; 2017
- [Bai17] **D.Bai; Y.Huang**
More on the Bending of Light in Quantum Gravity
arXiv:hep-th/1612.07629v2; 2017
- [Bje17] **N.E.J.Bjerrum-Bor et al.**
Illuminating Light Bending
arXiv:gr-qc/1704.01624v1; 2017
- [Bol12] **X.Bekaert; N.Boulanger; P.Sundell**
How higher-spin gravity surpasses the spin two barrier: no-go theorems versus yes-no examples
arXiv:hep-th/1007.0435v3; 2012
- [Des04] **S.Deser**
Self-Interaction and Gauge Invariance
arXiv:gr-qc/0411023v2; 2004
- [Des09] **S.Deser**
Gravity from self-interaction redux
arXiv:gr-qc/0910.2975v3; 2009

[End09] **M.Ender**

Das Standardmodell der Teilchenphysik

<http://www.manfred-ender.serpedon.de/index.html>; 2009

[Fal08] **S.Faller**

Effective Field Theory of Gravity

arXiv:hep-th/0708.1701v3; 2008

[Wei64] **S.Weinberg**

Photons and gravitons in S-matrix theory: derivation of charge conservation and equality of gravitational and inertial mass

Physical Review 135, B1049; 1964

[Wei95] **S.Weinberg**

The Quantum Theory of Fields. Vol.1: Foundations

Cambridge University Press; 1995