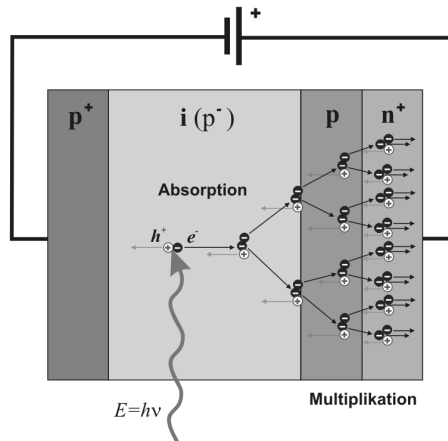


Von der Quantenwelt zur klassischen Welt



Manfred Ender

März 2023

Korrekturstand: 03/2023
webmaster@manfred-ender.serpedon.de

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen	1
1 Skizze zur QED	5
1.1 Wesentliche Postulate	5
1.2 Der Hilbert-Raum	6
1.3 Die Observablen	6
1.4 Elementarteilchen	7
1.5 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren	10
1.6 Innere Darstellungsräume	12
1.7 Freie Teilchen mit Masse	15
1.8 Die Normierung auf eine Kastenvolumen	19
1.9 Freie masselose Teilchen	21
1.10 Wechselwirkungen	24
1.11 Beispiel: Quanten-Elektrodynamik	28
2 Einige kurze Betrachtungen	33
2.1 Zeitsymmetrie	33
2.2 Die Richtung der Kausalität	35
2.3 Der Zerfall eines Teilchens	36
2.4 Quantentheoretische Darstellung	39
3 Dekohärenz ohne Verschränkung	43
3.1 Quantensprünge	43
3.2 Das Wärmebad	44
3.3 Die Caldeira-Leggett-Gleichung	49
4 Beispiele für den Messprozess	53
4.1 Der Doppelspalt-Versuch	53
4.2 Zerstörungsfreie Messung	54

5	Zusammenfassung	57
5.1	Die bisherigen Überlegungen	57
5.2	Die Rolle der Wellenfunktion	58
5.3	Das Bild der Realität	58
5.4	Elektronen und Photonen	61
	Literaturverzeichnis	63

Vorbemerkungen

Das Standardmodell der Teilchenphysik und die Allgemeine Relativitätstheorie sind die zwei fundamentalen physikalischen Theorien, die im Laufe des letzten Jahrhunderts entwickelt worden sind. Beide Theorien sind experimentell mit hoher Genauigkeit bestätigt worden. Konzeptionell sind die beiden Theorien jedoch nicht vereinbar und es ist bisher nicht gelungen, die beiden Theorien als Grenzfall einer umfassenden, vereinigten Theorie darzustellen.

Sowohl das Standardmodell als auch die Allgemeine Relativitätstheorie sind beide mit gewissen Problemen behaftet. Während in Störungsrechnungen des Standardmodells auftretende Unendlichkeiten mittels Renormierung „verdeckt“ werden können, ist dies nach der Quantisierung der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr möglich. Fasst man die Quantenfeldtheorie der Gravitation als effektive Feldtheorie auf, so erhält man jedoch ebenfalls eine in sich konsistente Theorie. Wegen den auftretenden Unendlichkeiten bei Störungsrechnungen geht man mittlerweile davon aus, dass beide Theorien effektive Feldtheorien einer noch unbekannteren Hochenergie-Theorie sind.

Nun besitzt die Quantentheorie das grundsätzliche Problem, wie sie zu interpretieren ist und zwar insbesondere wie definierte eindeutige Messergebnisse entstehen. Entsprechend gibt es eine Reihe von verschiedenen Interpretationsansätzen, um den Übergang zur klassisch erfahrbaren Welt zu erklären. Für Details hierzu siehe [\[End13\]](#). In diesem Text versuche ich deshalb eine Lösung direkt auf Basis der Quantenfeldtheorie zu entwickeln. [Diese zeigt, dass der Übergang von der Quantenwelt zur klassischen Welt und insbesondere auch die Erklärung des Messprozesses aus den Gesetzen der Quantenfeldtheorie selbst folgt. Eine gesonderte Interpretation ist hierfür nicht notwendig.](#)

Eine weiterer wichtiger Aspekt ist natürlich wie sich die Welt, so wie sie heute existiert, aus dem Urknall entwickelt hat. Dabei wirken die Gesetze der Quantentheorie, der Allgemeinen Relativitätstheorie und der Thermodynamik zusammen. Dies wird ausführlich in [End20] dargestellt und soll hier deshalb nicht diskutiert werden

Der Text ist wie folgt unterteilt:

Kapitel 1: Skizze der QED

Es werden die den Quantenfeldtheorien zugrundeliegenden Postulate aufgelistet und als Beispiel der strukturelle Aufbau der Quantenelektrodynamik dargestellt, der sich hieraus ableiten lässt. Insbesondere wird der Zusammenhang zwischen den Feldoperatoren, dem Zustandsvektor und der Wellenfunktion in der Ortsdarstellung diskutiert. Die Bedeutung des Spins zur Definition der unterschiedlichen Elementarteilchen sowie die Bedeutung des Stromoperators für die Wechselwirkungen werden erläutert.

Kapitel 2: Einige kurze Betrachtungen

Es wird gezeigt, dass in der Quantenfeldtheorie die Richtung der Kausalität (und damit letztlich die Zeitrichtung) festgelegt wird. Hieraus kann man folgern, dass der Zerfall eines Teilchens (oder äquivalent die Emission eines Photons von einem angeregten Atom) unabhängig von einem Beobachter real stattfindet. Aus der quantentheoretischen Darstellung der Emission eines Photons durch ein angeregtes Atom wird abgeleitet, dass nach der Emission des Photons zum Quantensystem ein neuer Zustandsvektor gehört.

Kapitel 3: Dekohärenz ohne Verschränkung

Die vorherigen Überlegungen werden auf andere Quantensprünge übertragen. Es wird gezeigt, wie das stochastische Eintreten der Quantensprünge dazu führt, dass ein makroskopisches Wärmebad keiner unitären Zeitentwicklung folgen kann und somit kein verschränkter Zustand, wie beim von Neumann Messprozess angenommen, mit dem Wärmebad möglich ist. Weiter wird abgeleitet wie diese Dekohärenz ohne Verschränkung dazu führt, dass das Verhalten eines Quantenobjekts im Wärmebad für alle praktischen Belange ein klassisches Verhalten zeigt.

Kapitel 4: Beispiele für den Messprozess

Als Beispiele für den Messprozess werden der Doppelspaltversuch und das Modell für zerstörungsfreie Messungen im Rahmen des oben entwickelten Ansatzes diskutiert. Es wird gezeigt, dass sich bei einer makroskopischen Messeinrichtung rein aus den Gesetzen der Quantenfeldtheorie immer ein definiertes und eindeutiges Messergebnis ergibt. Das durch den Kollaps der Wellenfunktion bedingte Messproblem der traditionellen Quantenmechanik wird auf diese Weise vermieden.

Kapitel 5: Zusammenfassung

Die Ergebnisse der bisherigen Überlegungen werden zusammengefasst. Es wird gezeigt, dass die Gesetze der Quantenwelt universell sind und die makroskopische Welt und deren Gesetze sich aus diesen ergeben. Die wesentlichen Aspekte dieses Überganges zur makroskopische Welt werden aufgelistet. Am Beispiel des Elektrons und Photons wird abschließend noch einmal diskutiert, was die besonderen Eigenschaften der elementaren Quantenobjekte sind.

Hinweise zur Notation:

Um Formeln so übersichtlich wie möglich zu halten, wird in diesem Text weitgehend in natürlichen Einheiten

$$c = \hbar = \epsilon_0 = 1$$

gearbeitet. In einzelnen Zahlenbeispielen wird allerdings auf SI-Einheiten übergegangen, damit diese anschaulicher werden. Weiterhin werden zur besseren Übersichtlichkeit Operatoren in den einzelnen Bildern unterschiedlich dargestellt, da je nach Zweckmäßigkeit ein geeignetes Bild gewählt wird. Die entsprechenden Operatoren sind wie folgt gekennzeichnet:

im Schrödinger-Bild mit einem Hut	\hat{L}
im Wechselwirkungsbild mit einem Haken	\check{L}
im Heisenberg-Bild mit einer Tilde	\tilde{L}

Im Heisenberg-Bild erhalten die Zustandsvektoren zusätzlich eine Tilde und im Wechselwirkungsbild einen Haken.

Kapitel 1

Skizze zur QED

Für eine ausführlichere Darstellung und weitere Details siehe [\[End09\]](#).

1.1 Wesentliche Postulate

Postulate der Quantenmechanik

- Über das Ergebnis der Wechselwirkung eines Quantensystems mit einem makroskopischen System lassen sich nur Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen.
- Die Energie eines Quantensystems ist immer positiv.
- Quantenobjekte einer Sorte sind ununterscheidbar.
- Das Quantenvakuum ist eindeutig und invariant.

Postulate der speziellen Relativitätstheorie

- Die Naturgesetze sind in jedem Inertialsystem gleich.
- Die Lichtgeschwindigkeit ist eine Konstante und in jedem Inertialsystem gleich.
- Raumartig getrennte Ereignisse können sich nicht beeinflussen.

Ergänzende Postulate

- Die Ergebnisse von verschiedenen Experimenten, die weit genug voneinander entfernt durchgeführt werden, sind nicht korreliert (Cluster-Dekompositionsprinzip).
- Die elementaren Quantenobjekte wechselwirken lokal punktförmig.

1.2 Der Hilbert-Raum

Das Postulat über Wahrscheinlichkeitsaussagen erlaubt es eine Korrespondenz zwischen physikalischen und mathematischen Größen zu konstruieren:

- Der Zustand eines Quantensystems wird durch einen normierten Zustandsvektor $|\eta\rangle$ in einem Vektorraum repräsentiert.
- Eine über den Zustandsvektor hinausgehende Beschreibung eines Quantensystems ist nicht möglich.
- Die beobachtbaren physikalischen Größen (Observablen) werden durch hermitesche Operatoren in diesem Raum beschrieben.
- Der zugehörige Vektorraum wird durch die Eigenvektoren der relevanten Observablen aufgespannt.

Dann gilt

- Bei einer Messung kann man nur einen der Eigenwerte des entsprechenden Operators der Observablen finden.
- Nach einer Messung befindet sich das Quantensystem in dem Zustand, der dem gemessenen Eigenwert entspricht.
- Befindet sich ein Quantensystem vor einer Messung im Zustand $|\eta\rangle$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung den Wert l zu erhalten, $W(l) = |\langle l|\eta\rangle|^2$.

Der zugehörige abstrakte Vektorraum wird als Hilbert-Raum bezeichnet.

1.3 Die Observablen

In der klassischen Physik erfolgt die Definition der Observablen über Erhaltungssätze bei bestimmten Symmetrietransformationen. Entsprechend ist es sinnvoll zur quantenmechanischen Beschreibung der Observablen gerade die Operatoren zu verwenden, auf die man durch den entsprechenden quantenmechanischen Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungsgröße geführt wird. Bei der linearen Transformation eines Quantensystems kann sich der zugeordnete Hilbert-Raum zur Beschreibung der Beobachtungen nicht ändern, da die Basisvektoren und die möglichen Messwerte vor und nach der Transformation identisch sind. Da die Naturgesetze in jedem Inertialsystem gleich

sind, sind räumliche und zeitliche Translationen Symmetrietransformationen jedes abgeschlossenen physikalischen Systems. Räumliche Translationen

$$\hat{U}_X(a) |m, x\rangle = |m, x - a\rangle \quad (1.3.1)$$

werden mit einem hermiteschen Operator \hat{P} durch

$$\hat{U}_X(a) = e^{+ia\hat{P}} \quad (1.3.2)$$

beschrieben. Für einen derart verschobenen Zustand gilt

$$\begin{aligned} p' &= \langle \eta'(t) | \hat{P} | \eta'(t) \rangle = \langle \eta(t) | \hat{U}_X^\dagger(a) \hat{P} \hat{U}_X(a) | \eta(t) \rangle \\ &= \langle \eta(t) | e^{-ia\hat{P}} \hat{P} e^{+ia\hat{P}} | \eta(t) \rangle = \langle \eta(t) | \hat{P} | \eta(t) \rangle = p \quad . \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Der Erwartungswert p ist eine Erhaltungsgröße bei räumlichen Translationen und der Operator \hat{P} ist deshalb mit dem Impulsoperator zu identifizieren.

Mit zeitlichen Translationen verknüpft man im Hilbert-Raum die zeitliche Entwicklung der Zustandsvektoren und definiert sie durch die Beziehung

$$\hat{U}_T(\tau) | \eta(t) \rangle = | \eta(t + \tau) \rangle \quad . \quad (1.3.4)$$

Dementsprechend muss mit einem hermiteschen Operator \hat{H}

$$\hat{U}_T(\tau) = e^{-i\tau\hat{H}} \quad (1.3.5)$$

sein. Für einen zeitlich verschobenen Zustand wird

$$\begin{aligned} E' &= \langle \eta(t') | \hat{H} | \eta(t') \rangle = \langle \eta(t) | \hat{U}_T^\dagger(\tau) \hat{H} \hat{U}_T(\tau) | \eta(t) \rangle \\ &= \langle \eta(t) | e^{+i\tau\hat{H}} \hat{H} e^{-i\tau\hat{H}} | \eta(t) \rangle = \langle \eta(t) | \hat{H} | \eta(t) \rangle = E \quad . \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Der Erwartungswert E ist eine Erhaltungsgröße bei zeitlichen Translationen und deshalb mit der Energie des Quantensystems zu identifizieren. Der Operator \hat{H} des Quantensystems wird als Hamilton-Operator bezeichnet.

1.4 Elementarteilchen

Nach den Postulaten der speziellen Relativitätstheorie sind die Naturgesetze in jedem Inertialsystem gleich und die Lichtgeschwindigkeit eine in allen Systemen gleiche Konstante. Ein Inertialsystem ist ein System, in dem sich ein Objekt geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, solange

keine Kraft auf das Objekt wirkt. Es ist leicht einzusehen, dass zwei Inertialsysteme sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Die Koordinaten-Transformation, die die Postulate der speziellen Relativitätstheorie erfüllt, ist die Poincare-Transformation.

Die Koordinaten-Transformation zwischen den Inertialsystemen muss eine lineare Transformation sein, die durch den Ansatz

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad \text{sowie} \quad x'_{\mu} = x_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} + a_{\mu} \quad (1.4.1)$$

mit einer reellen 4×4 -Matrix Λ beschreibbar ist. Führt man nun die sogenannten Generator-Matrizen

$$(L^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma} = i (g^{\mu\rho} \delta^{\nu}_{\sigma} - g^{\nu\rho} \delta^{\mu}_{\sigma}) \quad (1.4.2)$$

ein, so kann die Lorentz-Transformationen mit den sechs antisymmetrischen Größen $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ entsprechend

$$\Lambda(\omega) = e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} L^{\mu\nu}} \quad (1.4.3)$$

dargestellt werden. Für die Poincare-Transformation der Koordinaten bedeutet dies

$$T_P(\omega, a) = e^{+ia_{\mu} \hat{P}^{\mu}} e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} L^{\mu\nu}} \quad (1.4.4)$$

Im Hilbert-Raum muss für die zugehörige Transformation

$$\hat{U}_P(\omega, a) = e^{+ia_{\mu} \hat{P}^{\mu}} e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{M}^{\mu\nu}} \quad (1.4.5)$$

sein. Es folgt die Lie-Algebra der Poincare-Gruppe, die aus folgenden Vertauschungsrelationen

$$\left[\hat{P}^{\mu}, \hat{P}^{\nu} \right] = 0 \quad (1.4.6)$$

$$i \left[\hat{P}^{\rho}, \hat{M}^{\mu\nu} \right] = g^{\rho\nu} \hat{P}^{\mu} - g^{\rho\mu} \hat{P}^{\nu} \quad (1.4.7)$$

$$i \left[\hat{M}^{\rho\sigma}, \hat{M}^{\mu\nu} \right] = g^{\nu\sigma} \hat{M}^{\rho\mu} + g^{\rho\mu} \hat{M}^{\sigma\nu} - g^{\nu\rho} \hat{M}^{\sigma\mu} - g^{\sigma\mu} \hat{M}^{\rho\nu} \quad (1.4.8)$$

besteht. Mittels der Vertauschungsrelationen sind die Invarianten der Poincare-Transformation ableitbar. Casimir-Operatoren sind Operatoren, die mit allen Generatoren einer Transformation vertauschen. Die Poincare-Transformation besitzt zwei solcher Casimir-Operatoren. Dies sind

$$\hat{P}^2 = \hat{P}_{\mu} P^{\mu} \quad \text{sowie} \quad \hat{W}^2 = \hat{W}_{\mu} W^{\mu} \quad (1.4.9)$$

mit dem Pauli-Lubanski-Vektor

$$\hat{W}_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \hat{P}^\nu \hat{M}^{\rho\sigma} \quad . \quad (1.4.10)$$

Die Eigenzustände der beiden Casimir-Operatoren sind durch ihre Masse m und ihren Spin s definiert

$$\hat{P}_\mu \hat{P}^\mu |m, \vec{p}, s, s_z\rangle = m^2 \cdot |m, \vec{p}, s, s_z\rangle \quad (1.4.11)$$

$$\hat{W}_\mu \hat{W}^\mu |m, \vec{p}, s, s_z\rangle = -m^2 s(s+1) \cdot |m, \vec{p}, s, s_z\rangle \quad (1.4.12)$$

$$\hat{P}^\mu |m, \vec{p}, s, s_z\rangle = p^\mu \cdot |m, \vec{p}, s, s_z\rangle \quad (1.4.13)$$

$$\hat{W}^3 |m, \vec{p}, s, s_z\rangle = m s_z \cdot |m, \vec{p}, s, s_z\rangle \quad , \quad (1.4.14)$$

wobei

$$p^0 = +\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} \quad (1.4.15)$$

$$s \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \right\} \quad (1.4.16)$$

$$s_z \in \{-s, -(s-1), \dots, (s-1), s\} \quad (1.4.17)$$

gilt. Diese Eigenzustände charakterisieren Elementarteilchen. [Die Elementarteilchen als invariante Zustände der Poincare-Transformation besitzen ihre Masse \$m\$ und ihren Spin \$s\$ als unveränderliche Eigenschaften.](#) Zur Beschreibung der Zustandsvektoren der im weiteren Verlauf relevanten Elementarteilchen mit scharfem Impuls wird die Nomenklatur

$$\text{Skalar-Teilchen } s = 0 : |\eta; m, \vec{p}\rangle$$

$$\text{Spinor-Teilchen } s = \frac{1}{2} : |\eta; m, \vec{p}, \sigma\rangle \quad \text{mit } \sigma = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

$$\text{Proca-Teilchen } s = 1 : |\eta; m, \vec{p}, \lambda\rangle \quad \text{mit } \lambda = -1, 0, +1$$

$$\text{Photon } (m = 0) \quad s = 1 : |\eta; \omega, \vec{k}, \lambda\rangle \quad \text{mit } \lambda = -1, +1$$

$$\text{Graviton } (m = 0) \quad s = 2 : |\eta; \omega, \vec{k}, h\rangle \quad \text{mit } h = -2, +2$$

verwendet. Teilchen mit Spin $s = 3/2$ oder $s > 2$ scheinen in der Natur nicht realisiert zu sein.

Anmerkung: Die Kopplungskonstanten für Teilchen mit $s = 2 + n$ und $n = 1, 2, \dots$ müssen verschwinden, da sonst die Impulserhaltung bei Wechselwirkung mit Materie verletzt werden würde; d.h. sie könnten auch gar nicht in Wechselwirkung mit Materie treten.

1.5 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Achtung: Der Spin wird in den folgenden drei Seiten nicht mitgeschrieben.

Einen Mehrteilchenzustand identischer Teilchen kann man bei Vorliegen scharfer Impulse durch einen ket-Vektor

$$|\eta; m, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad (1.5.1)$$

beschreiben. Ein quantenmechanischer Mehrteilchenzustand unterscheidet sich grundsätzlich von einem makroskopischen Mehrteilchenzustand. Im Mikroskopischen ist es nicht möglich Marken zur Unterscheidung der Elementarteilchen anzubringen; d.h. gleiche Elementarteilchen besitzen keine Individualität und sind nach dem dritten Postulat der Quantenmechanik in Strenge nicht unterscheidbar. Dies bedeutet, dass es keine Observable gibt, welche die Individualität der Teilchen festlegt. Betrachtet man den Permutationsoperator \hat{P}_{ij} , der das i-te Teilchen mit dem j-ten Teilchen vertauscht

$$\begin{aligned} \hat{P}_{ij} |\eta; m, \vec{p}_1, \dots, \vec{r}, \dots, \vec{s}, \dots, \vec{p}_n\rangle \\ = N_P |\eta; m, \vec{p}_1, \dots, \vec{s}, \dots, \vec{r}, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad , \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

so müssen für ein System identischer Teilchen alle Observablen mit dem Permutationsoperator vertauschen

$$\left[\hat{O}, \hat{P}_{ij} \right] = 0 \quad . \quad (1.5.3)$$

Die gleiche Permutation zweimal ausgeführt liefert wieder den ursprünglichen Zustand; d.h.

$$\hat{P}_{ij}^2 = 1 \quad \implies \quad N_P = \pm 1 \quad . \quad (1.5.4)$$

Es muss deshalb zwei Sorten von Elementarteilchen geben, Bosonen

$$|\eta; m, \vec{p}_1, \dots, \vec{r}, \dots, \vec{s}, \dots, \vec{p}_n\rangle = + |\eta; m, \vec{p}_1, \dots, \vec{s}, \dots, \vec{r}, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad (1.5.5)$$

und Fermionen

$$|\eta; m, \vec{p}_1, \dots, \vec{r}, \dots, \vec{s}, \dots, \vec{p}_n\rangle = - |\eta; m, \vec{p}_1, \dots, \vec{s}, \dots, \vec{r}, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad . \quad (1.5.6)$$

Bosonen besitzen danach vollständig symmetrische und Fermionen vollständig antisymmetrische Mehrteilchenzustände. Da alle Observablen mit dem Permutationsoperator vertauschen, kann keine Observable existieren, die diese verschiedenen Zustände ineinander überführt; d.h. es ist eine unabänderliche

Eigenschaft der Elementarteilchen entweder zu den Bosonen oder zu den Fermionen zu gehören. Während bei den Bosonen zwei Teilchen die gleichen Werte für die Observablen haben können, folgt aus (1.5.6) aufgrund der Antisymmetrie für Fermionen

$$|\eta; m, \vec{p}_1, \dots, \vec{r}, \dots, \vec{r}, \dots, \vec{p}_n\rangle = 0 \quad . \quad (1.5.7)$$

Zwei Fermionen können sich im Gegensatz zu Bosonen nicht in dem gleichen Quantenzustand befinden. Dies ist das Paulische Ausschließungsprinzip.

Nach dem vierten Postulat der Quantenmechanik ist das Vakuum eindeutig und invariant; d.h. wenn man mit $|0\rangle$ den normierten Vakuumzustand bezeichnet, muss für diesen

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (1.5.8)$$

$$\hat{P}^\mu |0\rangle = 0 \quad (1.5.9)$$

$$\hat{M}^{\mu\nu} |0\rangle = 0 \quad (1.5.10)$$

$$\hat{Q} |0\rangle = 0 \quad (1.5.11)$$

gelten; d.h. der Vakuumzustand trägt keine Energie, besitzt keinen Impuls, keinen Drehimpuls und ist ungeladen. Da der Vakuumzustand eindeutig ist und die Elementarteilchen einer Sorte nicht unterscheidbar sind, ist es möglich Erzeugungsoperatoren $\hat{a}^\dagger(p)$ zu definieren, die entsprechend

$$|m, \vec{p}\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{p}) |0\rangle \quad (1.5.12)$$

einen zeitunabhängigen Impulseigenzustand aus einem Vakuumzustand heraus erzeugen. Mehrfache Anwendung des Erzeugungsoperators liefert dann einen zeitunabhängigen Impulseigenzustand für mehrere identische Teilchen

$$|m, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^\dagger(\vec{p}_n) \dots \hat{a}^\dagger(\vec{p}_1) |0\rangle \quad . \quad (1.5.13)$$

Der Normierungsfaktor ist notwendig, da die Reihenfolge der Argumente im Zustandsvektor keine Bedeutung hat, da es sich um nicht unterscheidbare Teilchen handelt. Zudem wurde angenommen, dass die Impulse \vec{p}_i verschieden sind (der Normierungsfaktor ist sonst komplizierter aufgebaut). Die Erzeugungsoperatoren sind entsprechend ihrer Definition (in dem hier zugrunde liegenden Schrödinger-Bild) zeitunabhängig.

Für den zum Erzeugungsoperator adjungierten Operator

$$\hat{a}(\vec{p}) = (\hat{a}^\dagger(\vec{p}))^\dagger \quad (1.5.14)$$

folgen die Beziehungen

$$\hat{a}(\vec{p}) |0\rangle = 0 \quad (1.5.15)$$

$$\hat{a}(\vec{q}) |m, \vec{p}\rangle = \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) |0\rangle \quad , \quad (1.5.16)$$

d.h. der Operator vernichtet einen zeitunabhängigen Impulseigenzustand. Wendet man die vorstehenden Beziehungen auf Mehrteilchenzustände an, so sieht man, dass der Kommutator zwischen Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren je nach dem Verhalten bei Permutationen

$$\left[\hat{a}(\vec{p}), \hat{a}^\dagger(\vec{q}) \right]_{\mp} = \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \quad (1.5.17)$$

sein muss. Dabei gehört das negative Vorzeichen zu Bosonen und das positive Zeichen zu Fermionen.

1.6 Innere Darstellungsräume

Die Lorentz-Transformationen lassen sich auf innere Darstellungsräume, deren Elemente hier als 4-komponentig angenommen werden, entsprechend

$$d' = M \cdot d \quad \iff \quad \begin{pmatrix} d'^0 \\ d'^1 \\ d'^2 \\ d'^3 \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}} \begin{pmatrix} d^0 \\ d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix} \quad (1.6.1)$$

übertragen. Die 4×4 Generator-Matrizen $M^{\mu\nu}$ müssen natürlich die zur Lorentz-Transformation gehörigen Vertauschungsrelationen

$$i [M^{\rho\sigma}, M^{\mu\nu}] = g^{\nu\sigma} M^{\rho\mu} + g^{\rho\mu} M^{\sigma\nu} - g^{\nu\rho} M^{\sigma\mu} - g^{\sigma\mu} M^{\rho\nu} \quad (1.6.2)$$

erfüllen. Mit Hilfe der inneren Darstellungsräume ist es möglich, die Elementarteilchen mit ihrem Spin als zusätzlichen Freiheitsgrad im Minkowski-Raum zu repräsentieren.

Die Generator-Matrizen für die sogenannte Vektordarstellung werden mit $T^{\mu\nu}$ bezeichnet und durch

$$\begin{aligned}
 T^{01} &= i \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T^{02} &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 T^{03} &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T^{23} &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix} & (1.6.3) \\
 T^{31} &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T^{12} &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

mit der Vektorraum-Metrik

$$g_{\text{Vektor}} = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.6.4)$$

gegeben. Die Vektorraum-Metrik entspricht danach der Metrik im Minkowski-Raum; d.h. es kann wie im Minkowski-Raum mit den Indizes gearbeitet werden. Man überprüft leicht, dass die Generator-Matrizen der Bildungsvorschrift

$$(T^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = i (g^{\mu\rho} \delta_\sigma^\nu - g^{\nu\rho} \delta_\sigma^\mu) \quad , \quad (1.6.5)$$

die in beliebigen Dimensionen gültig ist, folgen. Vergleich mit (1.4.2) zeigt, dass $T^{\mu\nu} = L^{\mu\nu}$ ist; d.h. Lorentz-Transformationen im inneren Darstellungsraum mit Vektorraum-Metrik und im Minkowski-Raum sind identisch. Zu beachten ist aber, dass die Vektoren im inneren Vektorraum komplexwertig sein können; d.h. beim Skalarprodukt ein Term konjugiert komplex eingeht. Im Vektorraum werden Teilchen mit Spin $s = 1$ repräsentiert.

Die Generator-Matrizen für die Spinordarstellung werden mit $\Sigma^{\mu\nu}$ bezeichnet und durch

$$\begin{aligned} \Sigma^{01} &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \Sigma^{02} &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ \Sigma^{03} &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} & \Sigma^{23} &= +\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix} & (1.6.6) \\ \Sigma^{31} &= +\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \end{pmatrix} & \Sigma^{12} &= +\frac{1}{2} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit der Spinorraum-Metrik

$$\mathfrak{g}_{\text{Spinor}} = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.6.7)$$

gegeben. Im Spinorraum werden Teilchen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ repräsentiert. Die zugehörigen Spinoren sind wiederum komplexwertige Größen.

Treten Vektoren und Spinoren zusammen auf, ist eine Größe notwendig, die zwischen diesen beiden Darstellungen vermittelt. Dies sind die sogenannten Gamma-Matrizen

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & & & (1.6.8) \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie man leicht explizit nachrechnet, sind sie so konstruiert, dass

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (1.6.9)$$

ist und die Clifford-Algebra

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (1.6.10)$$

gilt.

1.7 Freie Teilchen mit Masse

Eine Lorentz-Transformationen überträgt sich vom Minkowski-Raum

$$x' = \Lambda(\omega)x \quad (1.7.1)$$

wie folgt

$$p' = \Lambda(\omega)p \quad \text{in den Impulsraum,} \quad (1.7.2)$$

$$u' = \Sigma(\omega)u \quad \text{auf den inneren Spinorraum und} \quad (1.7.3)$$

$$e' = T(\omega)e \quad \text{auf den inneren Vektorraum.} \quad (1.7.4)$$

Die Größen $u(\vec{p}, \sigma)$ bzw. $e(\vec{p}, \lambda)$ werden als Spinoren bzw. Polarisationsvektoren bezeichnet. Für die Spinoren gilt

$$u^\dagger(\vec{p}, \sigma_1) \gamma^0 u(\vec{p}, \sigma_2) = 2m \cdot \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \quad (1.7.5)$$

$$(p_\mu \gamma^\mu - m) u(\vec{p}, \sigma) = 0 \quad , \quad (1.7.6)$$

während die Polarisationsvektoren die Beziehungen

$$e_\mu^*(\vec{p}, \lambda_1) e^\mu(\vec{p}, \lambda_2) = -1 \cdot \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \quad (1.7.7)$$

$$p_\mu e^\mu(\vec{p}, \lambda) = 0 \quad (1.7.8)$$

erfüllen. Alle vier vorstehenden Beziehungen sind dabei invariant bei Lorentz-Transformationen.

Anmerkung: Die Normierungen von $u(\vec{p}, \sigma)$ bzw. $e(\vec{p}, \lambda)$ sind im Vorgriff schon so gewählt worden, dass sich für die noch einzuführenden Feldoperatoren die richtigen Energiedimensionen ergeben. Dies bedeutet, da ein Impulseigenzustand $|\eta; \dots\rangle$ die Energiedimension 1 besitzt, für Skalar- sowie Proca-Teilchen die Energiedimension 1 und für Spinoren die Energiedimension 3/2.

Aus den vorstehenden Beziehungen folgen die Spin-Summen

$$\sum_{\sigma} u(\vec{p}, \sigma) u^{\dagger}(\vec{p}, \sigma) \gamma^0 = p_{\mu} \gamma^{\mu} + m \quad (1.7.9)$$

$$\sum_{\lambda} e^{\mu*}(\vec{p}, \lambda) e^{\nu}(\vec{p}, \lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{p^{\mu} p^{\nu}}{m^2} \quad (1.7.10)$$

Bei Lorentz-Transformationen, die die Spin-Richtung nicht verändern, gilt für die Zustandsvektoren

$$\hat{U}(\omega) \sqrt{2E(\vec{p})} |\eta; m, \vec{p}, s_3\rangle = \sqrt{2E(\vec{p}_{\Lambda})} |\eta; m, \vec{p}_{\Lambda}, s_3\rangle \quad (1.7.11)$$

Ändert sich die Spin-Richtung bei der Lorentz-Transformation ist noch zusätzlich eine Wigner-Rotation des Zustandsvektors in die Beziehung einzufügen. Dies macht die Darstellung etwas unübersichtlicher und ist für die nachfolgenden Betrachtungen unwesentlich.

In der Ortsdarstellung sind Teilchen bei definiertem Impuls entsprechend der Unschärferelation nicht lokalisiert. Zu den 1-Teilchenzuständen mit scharfem Impuls gehören in diesem Fall die Wellenfunktionen:

$$\Phi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (1.7.12)$$

$$\Psi_{p,\sigma}(x) = \frac{u(\vec{p}, \sigma)}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (1.7.13)$$

$$V_{p,\lambda}^{\mu}(x) = \frac{e^{\mu}(\vec{p}, \lambda)}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (1.7.14)$$

Die Wellenfunktionen sind natürlich Eigenfunktionen des Hamilton-Operators. Bezeichnet $f_{p,s}(x)$ die Wellenfunktion eines Impulseigenzustands von einem Spin-s Feld, dann gilt

$$\hat{H} f_{p,s}(x) = i \frac{\partial f_{p,s}(x)}{\partial t} = -i^2 p^0 f_{p,s}(x) = E f_{p,s}(x) \quad (1.7.15)$$

Die einem sich am Ort \vec{x} ruhendem Elementarteilchen zugeordneten zeit-unabhängigen Feldzustände $|F(x, s)\rangle$ lassen sich nach Impulseigenzuständen entwickeln. Allgemein gilt

$$|F(x, s)\rangle = \int f_{p,s}^{\dagger}(x) |\eta; m, \vec{p}, s\rangle d^3p \quad , \quad (1.7.16)$$

was wiederum für die Wellenfunktion

$$f_{p,s}(x) = \langle F(x, s) | \eta; m, \vec{p}, s \rangle \quad (1.7.17)$$

bedeutet. Dies führt insbesondere zu:

$$\text{Skalarfelder} \quad |\Phi(x)\rangle = \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \cdot e^{-i\vec{p}\vec{x}} |m, \vec{p}\rangle d^3p$$

$$\text{Spinorfelder} \quad |\Psi_l(x, \sigma)\rangle = \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \cdot e^{-i\vec{p}\vec{x}} u_l^*(\vec{p}, \sigma) |m, \vec{p}, \sigma\rangle d^3p$$

$$\text{Proca-Felder} \quad |V^\mu(x, \lambda)\rangle = \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \cdot e^{-i\vec{p}\vec{x}} e^{\mu*}(\vec{p}, \lambda) |m, \vec{p}, \lambda\rangle d^3p$$

Um auch Teilchenerzeugung und -vernichtung im Minkowski-Raum beschreiben zu können, führt man Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren durch die Forderung

$$\langle 0 | \hat{F}(x) | \eta; m, \vec{p}, s \rangle = \langle F(x, s) | \eta; m, \vec{p}, s \rangle = f_{p,s}(x) \quad (1.7.18)$$

in den Minkowski-Raum ein.

An dieser Stelle ist es nun zweckmäßig in das Wechselwirkungsbild überzugehen. Im Wechselwirkungsbild ist mit $\check{H} = \check{H}_0 + \check{H}_1$ die Dynamik durch

$$\frac{d}{dt} |\check{\eta}(t)\rangle = -i\check{H}_1(t) |\check{\eta}(t)\rangle \quad (1.7.19)$$

$$\frac{d}{dt} \check{O}(t) = i [\check{H}_0, \check{O}(t)] \quad (1.7.20)$$

gegeben. Die Operatoren im Wechselwirkungsbild folgen also freien Bewegungsgleichungen.

Nach dem dritten Postulat der speziellen Relativitätstheorie können sich raumartig getrennte Ereignisse nicht beeinflussen. Dies bedeutet, dass Messungen an zwei Raumzeit-Punkten, die einen raumartigen Abstand besitzen, die also nicht durch Licht- (oder andere) Signale miteinander in Wechselwirkung treten können, sich nicht gegenseitig beeinflussen dürfen. Für freie Teilchen, d.h. ohne das Vorliegen von Wechselwirkungen, ist im Wechselwirkungsbild der Zustandsvektor zeitlich konstant und die Zeitabhängigkeit wird ausschließlich

durch die Operatoren getragen. Für die Feldoperatoren bedeutet dies, dass sie die Mikrokausalitätsbedingung

$$[\check{\Phi}(x), \check{\Phi}^\dagger(y)]_{\mp} = 0 \quad \text{für} \quad (x-y)^2 \leq 0 \quad (1.7.21)$$

erfüllen müssen. Beachtet man dies, dann folgt zusammen mit (1.7.18), dass die Vertauschungsrelationen mit dem Minuszeichen zu bilden sind

$$[\check{\Phi}(x), \check{\Phi}^\dagger(y)]_- = i\Delta(m; x-y) \quad (1.7.22)$$

und die Feldoperatoren entsprechend

$$\check{\Phi}(x) = \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left(e^{-ipx} \hat{a}(\vec{p}) + e^{ipx} \hat{a}_c^\dagger(\vec{p}) \right) d^3p \quad (1.7.23)$$

aufgebaut sein müssen. Für die Spinor-Feldoperatoren ergibt sich analog

$$\check{\Psi}(x) = \sum_{\sigma} \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left(e^{-ipx} u(\vec{p}, \sigma) \hat{a}(\vec{p}, \sigma) + e^{ipx} v(\vec{p}, \sigma) \hat{a}_c^\dagger(\vec{p}, \sigma) \right) d^3p \quad (1.7.24)$$

sowie die kovarianten Vertauschungsrelationen (γ^0 ist ein zweistufiger Spinor)

$$\left[\check{\Psi}_l(x), \check{\Psi}_l^\dagger(y) \right]_{+} = \left([i\partial_{\mu} \gamma^{\mu} + m] \gamma^0 \right)_l i\Delta(m; x-y) \quad . \quad (1.7.25)$$

Spinorfelder beschreiben also Fermionen. Das freie Spinorfeld erfüllt die Dirac-Gleichung

$$(i\partial_{\mu} \gamma^{\mu} - m) \check{\Psi}(x) = 0 \quad . \quad (1.7.26)$$

Entsprechend ergibt sich für das Proca-Feld

$$\check{V}^{\mu}(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left(e^{-ipx} e^{\mu}(\vec{p}, \lambda) \hat{a}(\vec{p}, \lambda) + e^{ipx} e^{\mu*}(\vec{p}, \lambda) \hat{a}_c^\dagger(\vec{p}, \lambda) \right) d^3p \quad (1.7.27)$$

mit den kovarianten Vertauschungsrelationen

$$[\check{V}^{\mu}(x), \check{V}^{\nu\dagger}(y)]_- = - \left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial^{\mu} \partial^{\nu} \right) i\Delta(m; x-y) \quad . \quad (1.7.28)$$

Proca-Felder beschreiben Bosonen. Jede Komponente des freien Proca-Feldes erfüllt natürlich die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m^2) \check{V}^{\nu}(x) = 0 \quad (1.7.29)$$

und (1.7.8) führt zu der Lorentz-Bedingung

$$\partial_{\mu} \check{V}^{\mu}(x) = 0 \quad . \quad (1.7.30)$$

1.8 Die Normierung auf eine Kastenvolumen

Der Übergang von kontinuierlichen Impulswerten zu diskreten Impulswerten in einem Kastenvolumen erfolgt für die *Feldoperatoren* durch die Ersetzung

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int d^3p \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot \sum_{\ell} \quad . \quad (1.8.1)$$

Dabei ist aber zu beachten, dass diese Ersetzung ausschließlich für die Feldoperatoren gilt.

Die skalare Wellenfunktion

Die skalare Wellenfunktion im Volumen ist unverändert durch

$$\Phi^{(v)}(x) = \langle 0 | \check{\Phi}^{(v)}(x) | \check{\eta}(t) \rangle \quad (1.8.2)$$

definiert, woraus sich für den Impulseigenzustand von freien skalaren Teilchen die Wellenfunktion

$$\Phi_p^{(v)} = \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})V}} \cdot e^{-ipx} \quad (1.8.3)$$

ergibt. Die Dynamik von freien skalaren Teilchen ergibt sich aus der Lagrange-Dichte

$$L = \partial_\mu \Phi^\dagger^{(v)} \partial^\mu \Phi^{(v)} - m^2 \Phi^\dagger^{(v)} \Phi^{(v)} \quad . \quad (1.8.4)$$

Mit Hilfe des Noether-Theorems folgen aus der Translationsinvarianz des Wirkungsintegrals die Energie des Impulseigenzustandes

$$E_p|_{\text{KG}} = \int \left(\dot{\Phi}_p^\dagger^{(v)} \dot{\Phi}_p^{(v)} + \nabla \Phi_p^\dagger^{(v)} \cdot \nabla \Phi_p^{(v)} + m^2 \Phi_p^\dagger^{(v)} \Phi_p^{(v)} \right) d^3x = E(\vec{p}) \quad (1.8.5)$$

sowie aus der Invarianz bei Phasentransformation $\Phi^{(v)} \longrightarrow e^{iq} \Phi^{(v)}$ die elektrische Ladung des Impulseigenzustandes

$$Q_p|_{\text{KG}} = \int iq \left(\Phi_p^\dagger^{(v)} \dot{\Phi}_p^{(v)} - \dot{\Phi}_p^\dagger^{(v)} \Phi_p^{(v)} \right) d^3x = q \quad (1.8.6)$$

als Erhaltungsgrößen im Volumen. Die Wellenfunktion repräsentiert also genau ein einzelnes skalares Teilchen im Volumen. Nun ist auch

$$\Phi_p^{c(v)} = \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})V}} \cdot e^{ipx} \quad (1.8.7)$$

eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung. Für diese Lösung ergeben sich die Erhaltungsgrößen analog wie oben zu

$$E_p^c|_{\text{KG}} = E(\vec{p}) \quad (1.8.8)$$

$$Q_p^c|_{\text{KG}} = -q \quad . \quad (1.8.9)$$

Hieraus kann man ablesen, dass diese Lösung ein Antiteilchen repräsentiert. Die Interpretation der Klein-Gordon-Gleichung im Rahmen einer Einteilchentheorie ist deshalb nur in Sonderfällen möglich.

Die Spinor-Wellenfunktion

Die Spinor-Wellenfunktion im Volumen ist unverändert durch

$$\Phi^{(v)}(x) = \langle 0 | \check{\Psi}^{(v)}(x) | \check{\eta}(t) \rangle \quad (1.8.10)$$

definiert, [woraus sich für den Impulseigenzustand von freien skalaren Teilchen die Wellenfunktion](#)

$$\Psi_{p,\sigma}^{(v)} = \frac{u(\vec{p}, \sigma)}{\sqrt{2E(\vec{p})V}} \cdot e^{-ipx} \quad (1.8.11)$$

[ergibt](#). Die Dynamik von freien Spinor-Teilchen ergibt sich aus der Lagrange-Dichte

$$L = i\bar{\Psi}^{(v)}\gamma_\mu\partial^\mu\Psi^{(v)} - m\bar{\Psi}^{(v)}\Psi^{(v)} \quad . \quad (1.8.12)$$

Mit Hilfe des Noether-Theorems folgen aus der Translationsinvarianz des Wirkungsintegrals die Energie des Impulseigenzustandes

$$E_p|_{\text{SP}} = \int i\Psi_p^\dagger{}^{(v)}\dot{\Psi}_p^{(v)} d^3x = E(\vec{p}) \quad (1.8.13)$$

sowie aus der Invarianz bei Phasentransformation $\Psi^{(v)} \rightarrow e^{iq}\Psi^{(v)}$ die elektrische Ladung des Impulseigenzustandes

$$Q_p|_{\text{SP}} = q \int \Psi_p^\dagger{}^{(v)}\Psi_p^{(v)} d^3x = q \quad (1.8.14)$$

als Erhaltungsgrößen im Volumen. [Die Wellenfunktion repräsentiert also genau ein einzelnes Spinor-Teilchen im Volumen](#). Nun ist auch

$$\Psi_{p,\sigma}^{c(v)} = \frac{v(\vec{p}, \sigma)}{\sqrt{2E(\vec{p})V}} \cdot e^{ipx} \quad (1.8.15)$$

eine Lösung der Dirac-Gleichung. Für diese Lösung ergeben sich die Erhaltungsgrößen analog wie oben zu

$$E_p^c|_{\text{SP}} = E(\vec{p}) \quad (1.8.16)$$

$$Q_p^c|_{\text{SP}} = -q \quad . \quad (1.8.17)$$

Hieraus kann man ablesen, dass diese Lösung ein Antiteilchen repräsentiert. Die Interpretation der Dirac-Gleichung im Rahmen einer Einteilchentheorie ist deshalb nur in Sonderfällen möglich.

1.9 Freie masselose Teilchen

Für masselose skalare Teilchen und masselose Spinoren können die Ergebnisse des vorherigen Abschnittes direkt übernommen werden. Die Spin-Summe (1.7.10) zeigt aber, dass dies bei Proca-Feldern nicht möglich ist. Masselose Spin-1 Teilchen werden als Photonen bezeichnet und durch Maxwell-Felder beschrieben. Da das freie Maxwell-Feld keine Masse besitzt, wird zur Unterscheidung vom Proca-Feld der Impuls-Vierervektor mit q und die Energie mit ω bezeichnet. Mit einem Einheitsvektor \vec{e}_q ist dann

$$(q^\mu) = \omega \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{e}_q \end{pmatrix} \quad (1.9.1)$$

und es gilt

$$q^2 = q_\mu q^\mu = 0 \quad . \quad (1.9.2)$$

Die Polarisationsvektoren werden wieder durch die invariante Lorentz-Bedingung

$$q_\mu e^\mu(\vec{q}, \lambda) = 0 \quad (1.9.3)$$

definiert. Im Gegensatz zum Proca-Feld existieren aber nur zwei linear unabhängige Vektoren zu \vec{e}_q , denen man die Spineinstellungen $\lambda = -1$ und $\lambda = +1$ zugeordnet. Sie sind durch

$$e^0(\vec{q}, \lambda = \pm 1) = 0 \quad \text{und} \quad \vec{e}_q \cdot \vec{e}(\vec{q}, \lambda = \pm 1) = 0 \quad (1.9.4)$$

gegeben. Für einen dritten orthogonalen Polarisationsvektor mit $\lambda = 0$ müsste wegen $q_\mu q^\mu = 0$

$$e^\mu(\vec{q}, 0) = c \cdot q^\mu \quad \implies \quad e_\mu^*(\vec{q}, 0) e^\mu(\vec{q}, 0) = 0 \quad (1.9.5)$$

gelten. Er wäre dann aber nicht normierbar und somit folgt $c = 0$; d.h.

$$e^\mu(\vec{q}, 0) = 0 \quad . \quad (1.9.6)$$

Maxwell-Felder sind entsprechend nur transversal polarisiert. Der Maxwell-Feldoperator wird damit:

$$\check{A}^\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2q^0}} \left(e^{-iqx} e^\mu(\vec{q}, \lambda) \hat{a}(\vec{q}, \lambda) + e^{iqx} e^{\mu*}(\vec{q}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\vec{q}, \lambda) \right) d^3q$$

Zur Festlegung der Polarisationsvektoren führt man ein Referenzsystem ein, in welchem sich das Teilchen entlang der z -Achse bewegt und der Teilchenzustand durch $(k^\mu) = (k, 0, 0, k)^T$ gegeben ist. In diesem speziellen System fordert man dann, dass der Polarisationsvektor ein Eigenvektor der z -Komponente des Spinoperators

$$S_z \cdot e(\vec{k}, \lambda) = \lambda \cdot e(\vec{k}, \lambda) \quad (1.9.7)$$

ist. Ist nun ω_q der Parametersatz einer speziellen Lorentz-Transformation $\Lambda(\omega_q)$, die erst dem masselosen Teilchen durch einen Boost in z -Richtung den Impulsbetrag $q^0 = |\vec{q}|$ gibt und anschließend durch eine rein räumliche Drehung die Bewegung des Teilchens in die \vec{q} -Richtung bringt

$$\begin{pmatrix} q^0 \\ \vec{q} \end{pmatrix} = \Lambda(\omega_q) \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \quad , \quad (1.9.8)$$

so sind die Polarisationsvektoren für einen beliebigen Impuls durch die einheitliche Beziehung

$$e^\mu(\vec{q}, \lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu(\omega_q) e^\nu(\vec{k}, \lambda) \quad (1.9.9)$$

definierbar. Man beachte, dass es sich bei der vorstehenden Beziehung nicht um eine Lorentz-Transformation zwischen zwei Inertialsystemen handelt, sondern um die Definition der Polarisationsvektoren in einem einzigen Minkowski-Raum. Die Polarisationsvektoren sind aber trotz des scheinbaren Lorentz-Index kein echter Vierervektor. **Lorentz-Invarianz der zugehörigen Theorie erfordert, dass sie zusätzlich invariant unter der Eichtransformation**

$$e^\mu(\vec{q}, \lambda) \quad \longrightarrow \quad e^\mu(\vec{q}, \lambda) + c q^\mu \quad (1.9.10)$$

sein muss, wobei c für einen beliebigen komplexen Faktor steht. Die Eichinvarianz einer Theorie mit masselosen Spin-1 Teilchen ist keine unabhängige

Eigenschaft, sondern eine Konsequenz der Forderung nach Lorentz-Invarianz und damit auch keine Symmetrie im physikalischen Sinne. Sie hat keine Auswirkungen im abstrakten Hilbert-Raum auf die Teilchenzustände. Äquivalent kann man die Eichinvarianz auch durch die Forderung nach Invarianz der Theorie bei der Transformation

$$\check{A}^\mu(x) \longrightarrow \check{A}^\mu(x) + \frac{1}{e} \cdot \partial^\mu \check{\alpha}(x) \quad (1.9.11)$$

des Feldoperators ausdrücken. Aus der Mikrokausalitätsbedingung folgt wiederum, dass das Maxwell-Feld bosonische Vertauschungsrelationen besitzt.

Die Überlegungen für das masselose Spin-1 Teilchen lassen sich ohne große Modifikationen auf masselose Spin-2 Teilchen übertragen. Der Spin von masselosen Spin-2 Teilchen kann wie bei Spin-1 Teilchen nur zwei Werte annehmen, in diesem Fall die beiden Werte $h = \pm 2$. Auch hier führt man einen Feldoperator

$$\check{h}^{\mu\nu}(x) = \sum_h \int \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2q^0}} \left(e^{-iqx} e^{\mu\nu}(\vec{q}, h) \hat{a}(\vec{q}, h) + e^{iqx} e^{\mu\nu*}(\vec{q}, h) \hat{a}^\dagger(\vec{q}, h) \right) d^3q$$

ein, erzeugt die Polarisationsmatrizen wiederum aus einem Referenzsystem

$$e^{\mu\nu}(\vec{q}, h) = \Lambda^\mu{}_\rho(\omega_q) \Lambda^\nu{}_\sigma(\omega_q) e^{\rho\sigma}(\vec{k}, h) \quad (1.9.12)$$

und definiert sie in diesem Referenzsystem mit Hilfe der Polarisationsvektoren

$$e^{\rho\sigma}(\vec{k}, \pm 2) = e^\rho(\vec{k}, \pm 1) e^\sigma(\vec{k}, \pm 1) \quad . \quad (1.9.13)$$

Hieraus ergeben sich die wesentlichen Eigenschaften des Feldoperators zu:

$$\check{h}^{\mu\nu}(x) = \check{h}^{\nu\mu}(x) \quad (1.9.14)$$

$$\partial_\mu \check{h}^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (1.9.15)$$

$$\eta_{\mu\nu} \check{h}^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (1.9.16)$$

Eine vollständig analoge Diskussion wie beim Spin-1 Teilchen zeigt, dass ein rein formal Lorentz-invariant aussehender Skalar, der Spin-2 Felder enthält, nur dann tatsächlich auch Lorentz-invariant ist, wenn er zusätzlich invariant unter der Eichtransformation

$$\check{h}^{\mu\nu}(x) \longrightarrow \check{h}^{\mu\nu}(x) + \partial^\mu \check{\xi}^\nu + \partial^\nu \check{\xi}^\mu \quad (1.9.17)$$

ist. Auf der Ebene der Polarisationsmatrizen ist die Eichtransformation

$$e^{\mu\nu}(\vec{q}, h) \longrightarrow e^{\mu\nu}(\vec{q}, h) + c^\nu q^\mu + c^\mu q^\nu \quad (1.9.18)$$

mit Hilfe eines beliebigen Vierervektors c^μ formulierbar.

1.10 Wechselwirkungen

Es ist ein fundamentales Prinzip der Physik, dass Experimente, die weit genug voneinander stattfinden, nicht korreliert sind. Die Übergangswahrscheinlichkeiten, die bei Streuversuchen am CERN in Genf beobachtet werden, sind unabhängig von entsprechenden Experimenten am DESY in Hamburg. Wenn dieses Cluster-Dekompositionsprinzip nicht gültig wäre, könnten überhaupt keine Experimente sinnvoll ausgewertet werden.

Die einlaufenden und auslaufenden Teilchen sollen jetzt in zwei beliebige Cluster $i = i_1 \cup i_2$ und $f = f_1 \cup f_2$ aufgeteilt werden. Bezeichnen \vec{x}_1 und \vec{x}_2 die Orte der einlaufenden bzw. auslaufenden Teilchen des ersten Clusters und \vec{y}_1 und \vec{y}_2 die Orte der einlaufenden bzw. auslaufenden Teilchen des zweiten Clusters, so muss die zugehörige Übergangsamplitude, da sie nicht in die Teilsysteme faktorisiert werden kann, nach dem Cluster-Dekompositionsprinzip in der Ortsdarstellung verschwinden, wenn man die Cluster sehr weit voneinander entfernt. Die Übergangsamplitude muss also die Bedingung

$$\langle \vec{y}_2 + \vec{a}, \vec{x}_2 | \tilde{S} | \vec{x}_1, \vec{y}_1 + \vec{a} \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad |\vec{a}| \longrightarrow \infty \quad (1.10.1)$$

erfüllen. Hieraus folgt, dass die Übergangsamplitude nur genau eine Impuls erhaltene δ -Funktion besitzen darf. Eine solche Übergangsamplitude ergibt sich, wenn man den Hamilton-Operator aus einer Hamilton-Dichte mit normalgeordneten Produkten von Feldoperatoren und deren Ableitungen aufbaut. Wie leicht einzusehen ist, führt die Integration über die drei räumlichen Koordinaten zu genau einer Impuls erhaltenden δ -Funktion. Da die elementaren Quantenobjekte nur lokal punktförmig wechselwirken, müssen alle Faktoren zu gleichen Raumzeitpunkt genommen werden.

Für das Weitere ist es zweckmäßig in das Heisenberg-Bild zu wechseln.

Im Heisenberg-Bild ist die Dynamik durch

$$\frac{d}{dt} |\tilde{\eta}(t)\rangle = 0 \quad (1.10.2)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{O}(t) = i [\tilde{H}, \tilde{O}(t)] \quad (1.10.3)$$

gegeben. Die Operatoren tragen im Heisenberg-Bild die volle Dynamik, während der Zustandsvektor zeitunabhängig ist.

Das Heisenberg-Bild erlaubt es, die Theorie im Lagrange-Formalismus explizit kovariant zu formulieren. Die Quanten-Elektrodynamik wird dann durch die Poincare-invariante Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} L_{\text{QED}} &= L_{\text{Dirac}} + L_1 + L_{\text{Maxwell}} \\ &= \tilde{\Psi}(x) (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \tilde{\Psi}(x) + L_1 - \frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.10.4)$$

beschrieben. Der Wechselwirkungsterm muss nun invariant unter der Eichtransformation

$$\tilde{A}^\mu(x) \rightarrow \tilde{A}^\mu(x) + \frac{1}{e} \cdot \partial^\mu \tilde{\alpha}(x) \quad (1.10.5)$$

sein. Dies ist offensichtlich der Fall, wenn der Feldoperator des Maxwell-Feldes an einen erhaltenen Strom koppelt, denn dann liefert eine Eichtransformation des Maxwell-Feldes

$$\begin{aligned} L'_{\text{QED}} &= L'_{\text{Dirac}} + L'_1 + L'_{\text{Maxwell}} \\ &= L_{\text{Dirac}} - e \tilde{J}_\mu(x) \tilde{A}'^\mu(x) + L_{\text{Maxwell}} \\ &= L_{\text{Dirac}} - e \tilde{J}_\mu(x) \left(\tilde{A}^\mu(x) + \frac{1}{e} \cdot \partial^\mu \tilde{\alpha}(x) \right) + L_{\text{Maxwell}} \\ &= L_{\text{QED}} - \tilde{J}_\mu(x) \partial^\mu \tilde{\alpha}(x) \\ &= L_{\text{QED}} - \partial^\mu \left(\tilde{J}_\mu(x) \tilde{\alpha}(x) \right) + \left(\partial^\mu \tilde{J}_\mu(x) \right) \tilde{\alpha}(x) \\ &= L_{\text{QED}} - \partial^\mu \left(\tilde{J}_\mu(x) \tilde{\alpha}(x) \right) \quad , \end{aligned} \quad (1.10.6)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass die Divergenz des Stromoperators verschwindet. Da die beiden Lagrange-Dichten sich nur durch eine vollständige Divergenz unterscheiden, ist die Eichinvarianz des Wirkungsintegral und damit der Dynamikgleichungen gezeigt. Nun ist die Lagrange-Dichte der QED invariant unter globalen Phasentransformationen des Spinorfeldes

$$\tilde{\Psi}(x) \rightarrow e^{-iq\alpha} \tilde{\Psi}(x) \quad (1.10.7)$$

$$\tilde{\bar{\Psi}}(x) \rightarrow \tilde{\bar{\Psi}}(x) e^{+iq\alpha} \quad , \quad (1.10.8)$$

weshalb aus dem

Noether-Theorem: *Ist das Wirkungsintegral bei der infinitesimalen Symmetrietransformation*

$$\tilde{F}_n \longrightarrow \tilde{F}_n + f_n \cdot \delta\epsilon$$

invariant, dann ist der Stromoperator

$$\tilde{J}^\mu(x) = \sum_n \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \tilde{F}_n(x))} f_n$$

$$\text{divergenzfrei} \quad \partial_\mu \tilde{J}^\mu(x) = 0$$

$$\text{und der Operator} \quad \tilde{Q}^\nu = \int \tilde{J}^0(x) d^3x$$

eine Erhaltungsgröße des Systems bei der Symmetrietransformation.

für das Dirac-Feld der Stromoperator

$$\tilde{J}_\mu(x) = q \cdot \tilde{\Psi}(x) \gamma_\mu \tilde{\Psi}(x) \quad (1.10.9)$$

folgt. Dies liefert schließlich den Wechselwirkungsterm

$$\begin{aligned} L_1 &= -e \tilde{J}_\mu(x) \tilde{A}^\mu(x) \\ &= -eq \tilde{\Psi}(x) \gamma_\mu \tilde{\Psi}(x) \tilde{A}^\mu(x) \end{aligned} \quad (1.10.10)$$

bzw. äquivalent im Hamilton-Formalismus

$$\tilde{\mathcal{H}}_1(x) = eq \tilde{\Psi}(x) \gamma_\mu \tilde{\Psi}(x) \tilde{A}^\mu(x) \quad . \quad (1.10.11)$$

Die Theorie ist offensichtlich eichinvariant, weil das Maxwell-Feld linear an einen erhaltenen Strom ankoppelt. Ein solcher erhaltener Strom existiert immer, wenn ein Quantenfeld geladen ist.

Enthält der erhaltene Strom Ableitungen des geladenen Quantenfeldes, so ist zu beachten, dass zusätzliche Wechselwirkungsterme auftreten. Die vollständige Wechselwirkung ergibt sich dann relativ einfach aus dem Prinzip der minimalen eichinvarianten Kopplung; d.h. durch den Übergang von der partiellen Ableitung ∂^μ zur kovarianten Ableitung D^μ . Als Beispiel ist

$$D^\mu \tilde{\Phi}(x) = \partial^\mu \tilde{\Phi}(x) + ieq \tilde{A}^\mu(x) \cdot \tilde{\Phi}(x) \quad (1.10.12)$$

$$D^\mu \tilde{\Phi}^\dagger(x) = \partial^\mu \tilde{\Phi}^\dagger(x) - \tilde{\Phi}^\dagger(x) \cdot ieq \tilde{A}^\mu(x) \quad (1.10.13)$$

für den skalaren Feldoperator.

Der Wechselwirkungsterm, der sich aus der minimalen eichinvarianten Kopplung ergibt, ist identisch mit dem, der durch die Kopplung an einen erhaltenen Strom entsteht. Dies wird nachstehend am Beispiel des Skalarfeldes gezeigt.

Die minimale eichinvariante Kopplung liefert

$$L_1 = ieq \cdot \partial_\mu \tilde{\Phi}^\dagger(x) \cdot \tilde{\Phi}(x) \tilde{A}^\mu(x) - ieq \tilde{\Phi}^\dagger(x) \cdot \partial_\mu \tilde{\Phi}(x) \cdot \tilde{A}^\mu(x) + (eq)^2 \tilde{\Phi}^\dagger(x) \tilde{\Phi}(x) \tilde{A}_\mu(x) \tilde{A}^\mu(x) \quad . \quad (1.10.14)$$

Die Lagrange-Dichte des Skalarfeldes

$$L_\Phi = \partial_\mu \tilde{\Phi}^\dagger(x) \partial^\mu \tilde{\Phi}(x) - m^2 \tilde{\Phi}^\dagger(x) \tilde{\Phi}(x) \quad (1.10.15)$$

ist invariant unter globalen Phasentransformationen

$$\tilde{\Phi}(x) \rightarrow e^{-iq\alpha} \tilde{\Phi}(x) \quad \Longrightarrow \quad f_\Phi = -iq \tilde{\Phi}(x) \quad (1.10.16)$$

$$\tilde{\Phi}^\dagger(x) \rightarrow \tilde{\Phi}^\dagger(x) e^{+iq\alpha} \quad \Longrightarrow \quad f_{\Phi^\dagger} = +iq \tilde{\Phi}^\dagger(x) \quad . \quad (1.10.17)$$

Damit ergibt sich aus dem Noether-Theorem der Stromoperator

$$\tilde{J}_\mu^\alpha(x) = -iq \cdot \partial_\mu \tilde{\Phi}^\dagger(x) \tilde{\Phi}(x) + iq \tilde{\Phi}^\dagger(x) \partial_\mu \tilde{\Phi}(x) \quad . \quad (1.10.18)$$

Da der Maxwell-Feldoperator nur linear an den erhaltenen Strom koppeln darf, besteht mit der zugehörigen Lagrange-Dichte der allgemeine Zusammenhang

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{A}^\mu(x)} \int L_1 d^4x = -e \tilde{J}_\mu(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \delta L_1 = -e \tilde{J}_\mu(x) \delta \tilde{A}^\mu(x) \quad . \quad (1.10.19)$$

Hieraus folgt dann die Lagrange-Dichte

$$L_1^a = ieq \cdot \partial_\mu \tilde{\Phi}^\dagger(x) \tilde{\Phi}(x) \tilde{A}^\mu(x) - ieq \tilde{\Phi}^\dagger(x) \partial_\mu \tilde{\Phi}(x) \tilde{A}^\mu(x) \quad . \quad (1.10.20)$$

Nun treten in diesem Wechselwirkungsterm aber auch wieder Ableitungen des Skalarfeldes auf, die ebenfalls einen Beitrag zum Strom liefern. Dieser ist

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\mu^b(x) &= -eq^2 \cdot \tilde{\Phi}^\dagger(x) \tilde{\Phi}(x) \tilde{A}_\mu(x) - eq^2 \tilde{\Phi}^\dagger(x) \tilde{\Phi}(x) \tilde{A}_\mu(x) \\ &= -2eq^2 \cdot \tilde{\Phi}^\dagger(x) \tilde{\Phi}(x) \tilde{A}_\mu(x) \quad , \end{aligned} \quad (1.10.21)$$

woraus sich mit wiederum (1.10.19) für die zugehörige Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \delta L_1^b &= 2(eq)^2 \cdot \tilde{\Phi}^\dagger(x) \tilde{\Phi}(x) \tilde{A}_\mu(x) \delta \tilde{A}^\mu(x) \\ \Longleftrightarrow \quad L_1^b &= (eq)^2 \cdot \tilde{\Phi}^\dagger(x) \tilde{\Phi}(x) \tilde{A}_\mu(x) \tilde{A}^\mu(x) \end{aligned} \quad (1.10.22)$$

ergibt, in welchem keine Ableitungen mehr auftreten. Die Iteration stoppt. Insgesamt hat man damit

$$\begin{aligned} L_1 &= L_1^a + L_1^b \\ &= ieq \cdot \partial_\mu \tilde{\Phi}^\dagger(x) \cdot \tilde{\Phi}(x) \tilde{A}^\mu(x) - ieq \tilde{\Phi}^\dagger(x) \cdot \partial_\mu \tilde{\Phi}(x) \cdot \tilde{A}^\mu(x) \\ &\quad + (eq)^2 \tilde{\Phi}^\dagger(x) \tilde{\Phi}(x) \tilde{A}_\mu(x) \tilde{A}^\mu(x) \quad , \end{aligned} \quad (1.10.23)$$

was mit (1.10.14) übereinstimmt. Die gesamte Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} L_{\text{SED}} &= L_\Phi + L_1 + L_{\text{Maxwell}} \\ &= \left(\partial_\mu \tilde{\Phi}^\dagger(x) \partial^\mu \tilde{\Phi}(x) - m^2 \tilde{\Phi}^\dagger(x) \tilde{\Phi}(x) \right) + L_1 - \frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.10.24)$$

ist nun genau dann invariant unter der lokalen Eichtransformation

$$\tilde{A}^\mu(x) \longrightarrow \tilde{A}^\mu(x) + \frac{1}{e} \cdot \partial^\mu \tilde{\alpha}(x) \quad , \quad (1.10.25)$$

wenn gleichzeitig die globale Phasentransformation des Skalarfeldes in eine lokale Eichtransformation

$$\tilde{\Phi}(x) \rightarrow e^{-iq\tilde{\alpha}(x)} \tilde{\Phi}(x) \quad (1.10.26)$$

$$\tilde{\Phi}^\dagger(x) \rightarrow \tilde{\Phi}^\dagger(x) e^{+iq\tilde{\alpha}(x)} \quad (1.10.27)$$

übergeht.

1.11 Beispiel: Quanten-Elektrodynamik

Die Dynamik-Gleichungen für die Spinorfelder und dem Maxwell-Feld sind im Wechselwirkungsbild

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m) \check{\Psi}(x) = 0 \quad (1.11.1)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \check{A}^\nu(x) = 0 \quad (1.11.2)$$

$$\frac{d}{dt} |\check{\eta}(t)\rangle = -i\check{H}_1(t) |\check{\eta}(t)\rangle \quad (1.11.3)$$

mit dem Wechselwirkungsanteil

$$\check{H}_1(t) = eq \int : \check{\Psi}(x) \gamma_\mu \check{\Psi}(x) : \check{A}^\mu(x) d^3x \quad (1.11.4)$$

des Hamilton-Operators.

Dabei ist e die elektrische Kopplungskonstante, q die elektrische Ladung des dem Spinor zugeordneten Teilchens und $:\cdots:$ steht für die Normalordnung des Operatorproduktes. Die vorstehenden Beziehungen definieren die Quanten-Elektrodynamik.

Störungsrechnungen

Als Erstes wird nun kurz die Störungstheorie diskutiert. Für niederenergetische Prozesse (freie Bewegung, gebundene Zustände) ist eine Beschreibung im Rahmen der Spinor-Elektrodynamik mit Hilfe von Wellenfunktionen im Allgemeinen ausreichend. Grundlegende Voraussetzung für die Anwendbarkeit ist die Erhaltung der Teilchenart und -zahl während der Wechselwirkung. Die volle Quantenfeldtheorie ist aber notwendig zur Beschreibung hochenergetischer Prozesse, da diese immer mit der Erzeugung und Vernichtung von Teilchen verbunden sind. Auch wenn die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} |\tilde{\eta}(t)\rangle = -i\check{H}_1(t) |\tilde{\eta}(t)\rangle \quad (1.11.5)$$

des Zustandsvektors in praktischen Anwendungen nicht exakt lösbar ist, existiert eine wichtige Klasse von Anwendungen, die sich durch Störungsrechnung lösen lassen. Dies betrifft die Beschreibung von Streuvorgängen. Die typische Situation bei einem Streuvorgang ist, dass zu Beginn (idealisiert durch $t = -\infty$) und zu Ende (idealisiert durch $t = +\infty$) des Streuvorganges weit separierte und deshalb untereinander nicht wechselwirkende Teilchen vorliegen. Die Teilchen bewegen sich aufeinander zu, wechselwirken und die nach der Wechselwirkung verbleibenden bzw. neu entstehenden Teilchen entfernen sich dann wieder voneinander. Mathematisch beschreibt man dies mit dem durch

$$|\tilde{\eta}(+\infty)\rangle = \check{S} |\tilde{\eta}(-\infty)\rangle \quad (1.11.6)$$

definierten Streuoperator. Das so definierte Streuproblem ist einfacher zu lösen als die allgemeine Bewegungsgleichung des Zustandsvektors. Die Anfangs- und die möglichen Endzustände lassen sich entsprechend der Voraussetzung asymptotisch durch die freien Zustände

$$|i\rangle = \prod_{i=1}^{N_i} \hat{a}_i^\dagger(\vec{p}_i, s_i) |0\rangle \quad (1.11.7)$$

$$|f\rangle = \prod_{f=1}^{N_f} \hat{a}_f^\dagger(\vec{p}_f, s_f) |0\rangle \quad (1.11.8)$$

approximieren. Man beachte, dass im Wechselwirkungsbild die Zustände freier Teilchen zeitunabhängig sind.

Die Bewegungsgleichung (1.11.5) lässt sich zur Integralgleichung

$$|\check{\eta}(t)\rangle = |\check{\eta}(t_0)\rangle + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \check{H}_1(t_1) |\check{\eta}(t_1)\rangle \quad (1.11.9)$$

umformen. Für $t_0 = -\infty$ führt dies nach Iteration dieser Beziehung im Limes $t \rightarrow \infty$ zu der Reihenentwicklung des Streuoperators

$$\check{S} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \cdot T [\check{H}_1(t_1) \check{H}_1(t_2) \dots \check{H}_1(t_n)]$$

mit dem zeitgeordneten Produkt

$$T [\check{H}_1(t_1) \check{H}_1(t_2) \dots \check{H}_1(t_n)] = \check{H}_1(t_{i_1}) \check{H}_1(t_{i_2}) \dots \check{H}_1(t_{i_n}) \quad (1.11.10)$$

für $t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \dots \geq t_{i_n}$.

Da der Hamilton-Operator ein Skalar ist und deshalb nur eine gerade Anzahl von Fermion-Operatoren enthalten kann, ändert sich das Vorzeichen bei der Umordnung im zeitgeordneten Produkt nicht. Geht man von dem Hamilton-Operator zu dem Hamilton-Dichteoperator über, so ergibt sich die Störungsreihe in der explizit kovarianten Form:

$$\check{S} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n \cdot T [\check{\mathcal{H}}_1(x_1) \check{\mathcal{H}}_1(x_2) \dots \check{\mathcal{H}}_1(x_n)] \quad (1.11.11)$$

Der Hamilton-Dichteoperator der Quanten-Elektrodynamik nach (1.11.4) ist proportional zur Kopplungskonstanten e . Die Störungsreihe erlaubt damit eine Entwicklung der Übergangsamplitude

$$\langle f | \check{S} | i \rangle \quad (1.11.12)$$

nach Potenzen der Kopplungskonstanten. Aus der Übergangsamplitude folgen dann je nach Situation Zerfallswahrscheinlichkeiten oder Streuquerschnitte. Wichtig ist festzuhalten, dass bei den Störungsrechnungen nur freie Teilchen als asymptotische Zustände verwendet werden.

Spinor-Elektrodynamik

Als Zweites wird der Zusammenhang mit dem klassischen Maxwell-Feld $A^\mu(x)$ und der 1-Teilchen Wellenfunktion $\Psi(x)$ der Dirac-Theorie gezeigt. Bei dem Übergang von der Quantenfeldtheorie zur Quantenmechanik sind folgende Besonderheiten zu beachten:

- Da das Maxwell-Feld bosonisch ist und Photonen keine Masse besitzen, muss jede Theorie bezüglich des Maxwell-Feldes einer Vielteilchentheorie entsprechen und das klassische Maxwell-Feld wird deshalb als Erwartungswert

$$A^\mu(x) = \langle \check{\eta}_{phy}(t) | \check{A}^\mu(x) | \check{\eta}_{phy}(t) \rangle \quad (1.11.13)$$

des Feldoperators definiert, wobei jeder Zustand $|\check{\eta}_{phy}(t)\rangle$ des Maxwell-Feldes eine Superposition von Zuständen mit verschiedenen Photonenzahlen sein muss, ein sogenannter quasiklassischer Zustand.

- Das Spinorfeld ist fermionisch und an einem Ort kann sich jeweils nur ein Teilchen befinden. Man kann deshalb eine Theorie auf der 1-Teilchen Wellenfunktion

$$\Psi(x) = \langle 0 | \check{\Psi}(x) | \check{\eta}_{1\Psi}(t) \rangle \quad (1.11.14)$$

aufbauen, wobei der Zustandsvektor $|\check{\eta}_{1\Psi}(t)\rangle$ nur ein Teilchen repräsentieren soll. Dies kann natürlich nur eine Näherung für Situationen sein, in denen Teilchenerzeugung und -vernichtung vernachlässigt werden können.

- Es soll keine Selbstwechselwirkung eines Feldes auf sich selbst auftreten; d.h. wenn durch einen Zustand $|\check{\eta}_{1\Psi}(t)\rangle$ des Spinorfeldes eine Veränderung des Zustandes des Maxwell-Feldes $|\check{\eta}_{phy}(t)\rangle$ verursacht wird, so darf sich der Zustand $|\check{\eta}_{1\Psi}(t)\rangle$ selbst nicht ändern. Entsprechendes muss natürlich auch umgekehrt gelten. Der Gesamtzustandsvektor muss deshalb ein Produktzustand

$$|\check{\eta}_g(t)\rangle = |\check{\eta}_{1\Psi}(t)\rangle |\check{\eta}_{phy}(t)\rangle \quad (1.11.15)$$

sein, wobei die Zustandsvektoren entsprechend

$$\langle \check{\eta}_{1\Psi}(t) | \check{\eta}_{1\Psi}(t) \rangle = 1 \quad (1.11.16)$$

$$\langle \check{\eta}_{phy}(t) | \check{\eta}_{phy}(t) \rangle = 1 \quad (1.11.17)$$

einzelnen normiert sein müssen.

Die Spinor-Elektrodynamik ist also der Grenzfall der allgemeinen Theorie mit vielen Photonen aber nur einem geladenen Fermion, wobei der Gesamtzustandsvektor als separierbar in die beiden Teilzustandsvektoren angenommen

wird. Mit den vorstehenden Annahmen folgen aus den Operatorgleichungen für niedrige Energien die Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = eq \cdot \bar{\Psi}(x) \gamma^\nu \Psi(x) \quad (1.11.18)$$

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m) \Psi(x) = eq \cdot \gamma_\mu A^\mu(x) \Psi(x) \quad (1.11.19)$$

der Spinor-Elektrodynamik. Die erste Gleichung erlaubt das durch ein Spinorfeld erzeugte Maxwell-Feld zu berechnen, während die zweite Gleichung die Wirkung eines Maxwell-Feldes auf ein Spinorfeld beschreibt. Dabei kann man

$$w(x) = \frac{\Psi^\dagger(x) \Psi(x)}{\int \Psi^\dagger(x) \Psi(x) d^3x} \quad (1.11.20)$$

als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren, das Spinorteilchen zum Zeitpunkt t am Ort \vec{x} zu beobachten.

Der nicht-relativistische Grenzfall der Quantenoptik

Als Drittes wird der nicht-relativistische Grenzfall der Quantenoptik betrachtet. Die Materie wird dabei durch ihre Wellenfunktion und das Maxwell-Feld durch seinen Feldoperator im Schrödinger-Bild repräsentiert. Die auf die Wellenfunktion wirkenden Operatoren werden deshalb wie im Schrödinger-Bild mit einem $\hat{}$ gekennzeichnet.

In diesem Fall folgt in der Coulomb-Eichung ($\lambda = \pm 1$) aus der 2-Teilchen Dirac-Gleichung dann für die Wellenfunktion der Hamilton-Operator

$$\hat{H}_{\psi_p} = \sum_{\alpha=a,b} \frac{1}{2m_\alpha} \left(\hat{\mathbf{P}}_\alpha - eq_\alpha \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_\alpha) \right)^2 + \frac{eq_b eq_a}{4\pi |\hat{\mathbf{r}}_b - \hat{\mathbf{r}}_a|} - \sum_{\alpha=a,b} \frac{eq_\alpha}{2m_\alpha} \vec{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{r}}_\alpha) \quad (1.11.21)$$

der 2-Teilchen Pauli-Gleichung. Ohne Berücksichtigung des Spins reduziert sich die 2-Spinor Wellenfunktion auf eine skalare 2-Teilchen Wellenfunktion mit dem zugeordneten Hamilton-Operator

$$\hat{H}_\eta = \sum_{\alpha=a,b} \frac{1}{2m_\alpha} \left(\hat{\mathbf{P}}_\alpha - eq_\alpha \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_\alpha) \right)^2 + \frac{eq_b eq_a}{4\pi |\hat{\mathbf{r}}_b - \hat{\mathbf{r}}_a|} \quad , \quad (1.11.22)$$

aus dem sich für den Wechselwirkungsanteil mit dem Maxwell-Feld

$$\hat{H}_I = \sum_{\alpha=a,b} -\frac{eq_\alpha}{m_\alpha} \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\vec{r}_\alpha) \quad (1.11.23)$$

ergibt.

Kapitel 2

Einige kurze Betrachtungen

2.1 Zeitsymmetrie

Anmerkung: Die Idee für diesen Abschnitt basiert auf [Rov15].

Viele quantenmechanische Experimente folgen dem allgemeinen Schema:

- Präparation eines Systems zu Beginn des Experimentes.
- Zeitliche Entwicklung des Systems.
- Messung einer Observablen des Systems.

Nach der Präparation und nach der Messung befindet sich das System jeweils in einem genau definierten Zustand. Eine Präparation erfolgt mit Hilfe einer makroskopischen Einrichtung und entspricht praktisch einer Messung ohne Ableseung des Messergebnisses. Dies ist ein Indiz dafür, dass kein Beobachter für die Reduktion des Zustandsvektors notwendig ist, sondern die Wechselwirkung mit einer makroskopischen Apparatur (zur Präparation oder zur Messung) ausreichend für die Erlangung eines eindeutig definierten Zustandes ist.

Wird nun ein System in dem Zustand a präpariert, so wird bei der Messung nach einer Zeit t der Zustand b mit der Wahrscheinlichkeit

$$W_t(a \rightarrow b) = \left| \langle a | e^{-i\hat{H}t} | b \rangle \right|^2 \quad (2.1.1)$$

festgestellt. Bei umgekehrter Zeitrichtung $\tau = -t$ würde sich analog

$$W_\tau(b \rightarrow a) = \left| \langle b | e^{-i\hat{H}\tau} | a \rangle \right|^2 = \left| \langle b | e^{i\hat{H}t} | a \rangle \right|^2 \quad (2.1.2)$$

ergeben. Nun ist

$$W_t(a \rightarrow b) = \left| \langle a | e^{-i\hat{H}t} | b \rangle \right|^2 = \left| \langle b | e^{i\hat{H}t} | a \rangle \right|^2 = W_\tau(b \rightarrow a) \quad , \quad (2.1.3)$$

d.h. durch Beobachtung der Übergangswahrscheinlichkeiten kann ein Beobachter nicht zwischen den beiden Zeitrichtungen unterscheiden. Die Quantentheorie ist also symmetrisch bezogen auf Ereignisse der Präparation und der Messung; d.h. zeitlich symmetrisch. Dies gilt allerdings nicht für die quantenmechanische Beschreibung der dynamischen Entwicklung! Betrachtet man zusätzlich einen Zustand während der zeitlichen Entwicklung des System (hier durch einen Querstrich gekennzeichnet), so gilt nämlich

$$|a\rangle \longrightarrow |\bar{a}\rangle \longrightarrow |b\rangle \quad (2.1.4)$$

und als direkte Umkehrung des zeitlichen Ablauf würde sich

$$|b\rangle \longrightarrow |\bar{a}\rangle \longrightarrow |a\rangle \quad (2.1.5)$$

ergeben, während der umgekehrte zeitliche Prozess tatsächlich durch

$$|b\rangle \longrightarrow |\bar{b}\rangle \longrightarrow |a\rangle \quad (2.1.6)$$

beschrieben wird. Dies bedeutet, dass im Gegensatz zu den Übergangswahrscheinlichkeiten zweier beobachteter Ereignisse die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion nicht zeitlich symmetrisch ist. Die Verletzung der Zeitsymmetrie der quantenmechanischen Dynamik ist allerdings nicht beobachtbar

Die Zeitrichtung wird für die Wellenfunktion durch die Vorzeichenwahl in der Schrödinger-Gleichung bzw. äquivalent durch die Vorzeichenwahl in den Vertauschungsrelationen

$$i \frac{\partial \eta(x)}{\partial t} = \hat{H} \eta(x) \quad \iff \quad [\hat{P}^\mu, \hat{X}^\nu]_- = i g^{\mu\nu} \quad (2.1.7)$$

festgelegt, so dass sich für die Wellenfunktion Lösungen $\eta(x) = e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})}$ mit positiver Energie

$$\hat{H} e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} = i \frac{\partial}{\partial t} e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} = E e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} \quad (2.1.8)$$

ergeben. In diesem Sinne wird in der Quantenmechanik eine Zeitrichtung explizit ausgezeichnet.

2.2 Die Richtung der Kausalität

Anmerkung: Die Idee für diesen Abschnitt basiert auf dem Artikel [Don20]. Die Darstellung erfolgt im Wechselwirkungsbild.

Die Quantenmechanik ist ein Grenzfall der allgemeineren Quantenfeldtheorie. In der Quantenfeldtheorie wird den elementaren Prozessen (der Zustand vor und nach einer Wechselwirkung) eine eindeutige kausale Richtung zugeordnet. Die Zeitrichtung wird dabei so festgelegt, dass die positive Richtung der Zeitkoordinate mit der kausalen Richtung übereinstimmt. Dies bedeutet, dass die Elementarteilchen mit positiver Energie sich von der kausalen Vergangenheit in die kausale Zukunft bewegen sollen.

Seinen Ausdruck findet dies im Feynman-Propagator der Quantenfeldtheorie. Dies wird am Beispiel des skalaren Feldes diskutiert. Sei $|\check{\eta}(t)\rangle$ ein Zustandsvektor, der auch ein Eigenzustand des Ladungsoperators ist

$$\check{Q}|\check{\eta}(t)\rangle = Q|\check{\eta}(t)\rangle \quad , \quad (2.2.1)$$

dann ist der Feldoperator eines Skalarfeldes mit der Ladung q so konstruiert, dass

$$\check{Q}\check{\Phi}^\dagger(x)|\check{\eta}(t)\rangle = (Q + q)\check{\Phi}^\dagger(x)|\check{\eta}(t)\rangle \quad (2.2.2)$$

$$\check{Q}\check{\Phi}(x)|\check{\eta}(t)\rangle = (Q - q)\check{\Phi}(x)|\check{\eta}(t)\rangle \quad (2.2.3)$$

gilt. Befindet sich nun an einem Ort \vec{x}_1 eine Ladung Q_1 , die sich zum Zeitpunkt t_1 um die Ladungsmenge q erhöht, und am Ort \vec{x}_2 eine Ladung Q_2 , die sich zum Zeitpunkt t_2 um die Ladungsmenge q verringert, so ist dieser Prozess auf zwei verschiedene Weisen realisierbar:

- $t_1 > t_2$: Ein Teilchen mit der Ladung q wird bei \vec{x}_2 zum Zeitpunkt t_2 emittiert, bewegt sich nach \vec{x}_1 und wird dort zum Zeitpunkt t_1 absorbiert.
- $t_1 < t_2$: Ein Antiteilchen mit der Ladung $-q$ wird bei \vec{x}_1 zum Zeitpunkt t_1 emittiert, bewegt sich nach \vec{x}_2 und wird dort zum Zeitpunkt t_2 absorbiert.

Die beiden Prozesse lassen sich durch den Feynman-Propagator

$$i\Delta_F(x_1 - x_2) = \Theta(t_1 - t_2)\langle 0|\check{\Phi}(x_1)\check{\Phi}^\dagger(x_2)|0\rangle + \Theta(t_2 - t_1)\langle 0|\check{\Phi}^\dagger(x_2)\check{\Phi}(x_1)|0\rangle$$

darstellen, der die Definition der positiven Zeitrichtung enthält. Der Feynman-Propagator beschreibt -abhängig von der Zeitordnung- die ungestörte Ausbreitung (d.h. ohne Wechselwirkung) von Teilchen und Antiteilchen. Ihm kommt

im Hinblick auf die Störungsrechnung eine große Bedeutung in der Quantenfeldtheorie zu. Die Unterscheidung der beiden Prozesse durch $t_1 > t_2$ bzw. $t_1 < t_2$ ist für raumartige Abstände nicht Lorentz-invariant, da in diesem Fall die Einteilung in früher oder später vom Bezugssystem abhängt. Die Berücksichtigung beider Prozesse im Feynman-Propagator führt aber dazu, dass dieser kovariant ist. Damit wird

$$\begin{aligned}
 i\Delta_F(x_1 - x_2) &= \Theta(t_1 - t_2)\langle 0|\check{\Phi}(x_1)\check{\Phi}^\dagger(x_2)|0\rangle + \Theta(t_2 - t_1)\langle 0|\check{\Phi}^\dagger(x_2)\check{\Phi}(x_1)|0\rangle \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \left[\Theta(t_1 - t_2)e^{-ip(x_1-x_2)} + \Theta(t_2 - t_1)e^{ip(x_1-x_2)} \right] \\
 &= \Theta(t_1 - t_2) \cdot i\Delta_+(m; x_1 - x_2) + \Theta(t_2 - t_1) \cdot i\Delta_+(m; x_2 - x_1) \\
 &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int \Delta_F(p) \cdot e^{-ip(x_1-x_2)} d^4p
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

mit der Impulsdarstellung

$$\Delta_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{2.2.5}$$

Bei den Störungsrechnungen gehen die durch die freien Feldoperatoren und deren Vertauschungsrelationen bestimmten Feynman-Propagatoren direkt als Faktoren in die Berechnung der Feynman-Amplituden ein. **Das sich ergebende positive Vorzeichen des infinitesimalen Terms $i\epsilon$ im Nenner codiert dabei mathematisch, dass die Bewegung des Teilchens mit positiver Energie tatsächlich in die kausale Zukunft erfolgt.**

Anmerkung: Die Wahl der Richtung der Zeitkoordinate ist aber eigentlich willkürlich. Man könnte genauso gut mit Uhren arbeiten, die die Zeit rückwärts zählen. Entscheidend ist vielmehr die Richtung der Kausalität, die natürlich immer von der Vergangenheit in die Zukunft gerichtet ist.

2.3 Der Zerfall eines Teilchens

Aus der Quantenfeldtheorie ergibt sich für den Zerfall

$$1 \longrightarrow 2 + 3 + \dots \tag{2.3.1}$$

eines instabilen Teilchens die Zerfallsrate Γ pro Zeiteinheit. Bezeichnet N_0 die Anzahl von instabilen Teilchen einer Sorte zum Zeitpunkt $t = 0$, dann ist die zeitliche Entwicklung der Anzahl der noch nicht zerfallenen Teilchen

$$dN = -N\Gamma dt \tag{2.3.2}$$

und es ergibt sich

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN}{N} = - \int_0^t \Gamma dt \quad \Longrightarrow \quad N(t) = N_0 e^{-\Gamma t} \quad . \quad (2.3.3)$$

Dies bedeutet für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen bis zu einem bestimmten Zeitpunkt t zerfallen ist,

$$W(t) = 1 - e^{-\Gamma t} \quad . \quad (2.3.4)$$

Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte im Zeitpunkt t zu zerfallen, ist dann

$$w(t) = \frac{dW(t)}{dt} = \Gamma e^{-\Gamma t} \quad . \quad (2.3.5)$$

Als Lebensdauer τ des instabilen Teilchens wird die mittlere Zeitdauer

$$\tau = \int_0^\infty t w(t) dt = \Gamma e^{-\Gamma t} \left(\frac{-\Gamma t - 1}{\Gamma^2} \right) \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{\Gamma} \quad (2.3.6)$$

bis zum Zerfall bezeichnet. **Der Zerfall eines Teilchens definiert eine Richtung der Zeit (vorher: nicht zerfallen; nachher: zerfallen). In diesem Sinne zeichnet die Quantenfeldtheorie in den Störungsrechnungen die Zeitrichtung aus.**

Für den zeitabhängigen Teil der Wellenfunktion, der ein instabilen Teilchens mit der Masse m beschreibt, folgt

$$\eta(t) = C e^{-\frac{\Gamma}{2}t} e^{-imt} \quad \text{für } t \geq 0 \quad , \quad (2.3.7)$$

da die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen anzutreffen, entsprechend

$$\eta^*(t)\eta(t) = C^2 e^{-\Gamma t} \quad (2.3.8)$$

exponentiell mit der Zeit abnehmen muss. Bedingt durch die endliche Lebensdauer kann eine Energiemessung immer nur über einen endlichen Zeitraum erfolgen. Nach der Unschärferelation bedeutet dies, dass die Energie nur mit einer korrespondierenden Genauigkeit bestimmt werden kann. Fourier-Transformation in die spektralen Darstellung ergibt

$$\begin{aligned} \eta(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) e^{iEt} dt \\ &= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left(\cos(E - m)t + i \sin(E - m)t \right) dt \\ &= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\Gamma/2 + i(E - m)}{(E - m)^2 + \Gamma^2/4} \quad , \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

aus der die Energieverteilung

$$|\eta(E)|^2 = \frac{C^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{(E - m)^2 + \Gamma^2/4} \quad (2.3.10)$$

folgt. Da diese spektrale Verteilung kontinuierlich ist, muss

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\eta(E)|^2 dE &= \frac{C^2}{2\pi} \int_{-m}^\infty \frac{dx}{x^2 + \Gamma^2/4} \\ &\simeq \frac{C^2}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + \Gamma^2/4} \\ &= \frac{C^2}{2\pi} \cdot \frac{2}{\Gamma} \arctan\left(\frac{x}{\Gamma/2}\right) \Big|_{-\infty}^\infty \\ &= \frac{C^2}{2\pi} \cdot \frac{2}{\Gamma} \cdot \pi = \frac{C^2}{\Gamma} \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

sein. Dies liefert für die Energie schließlich die Breit-Wigner-Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$|\eta(E)|^2 = \frac{\Gamma/2\pi}{(E - m)^2 + \Gamma^2/4} \quad (2.3.12)$$

Kurzlebige instabile Teilchen können durch derartiger Resonanzkurven bei der Beobachtung ihrer Energieverteilung experimentell nachgewiesen werden.

Ein Beobachter, der zu einem festen Zeitpunkt t_b immer wieder ein einzelnes Teilchens beobachtet, wird feststellen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass es bis zu diesem Zeitpunkt zerfallen ist, $W(t_b)$ ist. Er kann aber keine Aussage darüber treffen, zu welchem Zeitpunkt der Zerfall real stattgefunden hat.

Wenn die Lebensdauer eines Teilchens eine reale Eigenschaft des Teilchens sein soll, dann macht die vorstehende Betrachtung aber nur einen richtigen Sinn, wenn auch der Zerfall ein realer physikalischer Vorgang ist, der zu einem bestimmten Zeitpunkt tatsächlich stattfindet und weder an eine Messung noch an einen externen Beobachter gebunden ist.

Der Zerfall des Teilchens wird danach nicht erst durch den Akt der Beobachtung realisiert, sondern kann bereits zu einem früheren Zeitpunkt real eingetreten sein. Dies bedeutet aber auch, dass ab diesem Zeitpunkt das zukünftige Verhalten der entstehenden Teilchen durch einen neuen korrespondierenden Zustandsvektor repräsentiert werden muss. Der Zerfall ist also inhärent mit einer sofortigen Änderung des Zustandsvektors verbunden.

2.4 Quantentheoretische Darstellung

Die quantentheoretische Darstellung des Zerfalls eines Teilchens soll am Beispiel der Emission eines Photons von einem Atom, das zum Zeitpunkt $t = 0$ angeregt wird, weiter diskutiert werden. Das Atom soll wiederum als ruhend angenommen werden. Seine kinetische Energie kann wegen seiner großen Masse dann auch nach der Emission des Photons vernachlässigt werden. Der angeregte Zustand des Atoms sei a und der Grundzustand nach Emission g :

$$a \longrightarrow g + \gamma \quad (2.4.1)$$

Der Zustandsvektor zur Beschreibung der Emission eines Photons ist (ohne Beachtung der Impulse, Drehimpulse und Polarisationen)

$$|\eta(t)\rangle = \alpha(t) \cdot e^{-iE_a t} |a, 0_\gamma\rangle + \beta(t) \cdot e^{-i(E_g + \omega)t} |g, \gamma\rangle \quad (2.4.2)$$

mit $\alpha(0) = 1$ und $\beta(0) = 0$, wobei E_a bzw. E_g bei nicht-relativistischer Betrachtung für die jeweilige Bindungsenergie des Elektrons, das an der Emission des Photons beteiligt ist, steht. Aus der Schrödinger-Gleichung folgt die Erhaltung der Norm, was in diesem Fall

$$|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = 1 \quad (2.4.3)$$

bedeutet. Dabei muss

$$|\beta(t)|^2 = W(t) = 1 - e^{-\Gamma t} \quad \implies \quad \alpha(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \quad (2.4.4)$$

sein, damit sich das Ensemble-Ergebnis (2.3.4) richtig ergibt. Eine hierüber hinausgehende Beschreibung der zeitlichen Entwicklung des angeregten Zustands ist nicht möglich. Störungsrechnung in erster Ordnung liefert unter Ausnutzung der Photonenbeziehung $q = |\vec{q}| = \omega$ für die Zerfallsrate

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int dq_x dq_y dq_z \sum_{\lambda=\pm 1} 2\pi\delta(\omega + E_g - E_a) \left| \langle g, \gamma(\vec{q}, \lambda) | \hat{H}_I | a, 0_\gamma \rangle \right|^2 \\ &= \int d\Omega \int_0^\infty q^2 dq \sum_{\lambda=\pm 1} 2\pi\delta(\omega + E_g - E_a) \left| \langle g, \gamma(\vec{q}, \lambda) | \hat{H}_I | a, 0_\gamma \rangle \right|^2 \\ &= 2\pi\omega^2 \int d\Omega \sum_{\lambda=\pm 1} \left| \langle g, \gamma(\vec{q}, \lambda) | \hat{H}_I | a, 0_\gamma \rangle \right|^2 \quad , \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

wobei im letzten Schritt die Energieerhaltung durch die δ -Funktion ausgenutzt wurde. Nun ist in dem vorliegenden Fall unter Berücksichtigung der

Elektron/Photon-Wechselwirkung (siehe (1.11.23) sowie [End13]; allerdings dort in der Kastennormierung)

$$\langle g; \gamma(\vec{q}, \lambda) | \hat{H}_I | a; 0_\gamma \rangle = \frac{e}{m_e} \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\omega}} \langle g | \hat{\mathbf{P}} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda^* | a \rangle \quad (2.4.6)$$

und, da die beiden Polarisationsvektoren zusammen mit $\vec{e}_q = \vec{q}/q$ ein vollständiges orthonormales Basissystem bilden,

$$\begin{aligned} \int d\Omega \sum_{\lambda=\pm 1} \left| \langle g | \hat{\mathbf{P}} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda^* | a \rangle \right|^2 &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \sum_{\lambda=\pm 1} \left| \langle g | \hat{\mathbf{P}} | a \rangle \cdot \vec{\epsilon}_\lambda^* \right|^2 \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \left(\left| \langle g | \hat{\mathbf{P}} | a \rangle \right|^2 - \left| \langle g | \hat{\mathbf{P}} | a \rangle \cdot \vec{e}_q \right|^2 \right) \\ &= 2\pi \left| \langle g | \hat{\mathbf{P}} | a \rangle \right|^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta (1 - \cos^2\theta) \\ &= \frac{8\pi}{3} \left| \langle g | \hat{\mathbf{P}} | a \rangle \right|^2 \quad . \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Nun gilt für das nicht-relativistische ungestörte Elektron

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m_e} + V(\hat{\mathbf{r}}) \quad \Longrightarrow \quad [\hat{H}_0, \hat{\mathbf{r}}] = -\frac{i}{m_e} \hat{\mathbf{P}} \quad , \quad (2.4.8)$$

woraus mit $\omega = E_a - E_g$ die Beziehung

$$\langle g | \hat{\mathbf{P}} | a \rangle = im_e(E_g - E_a) \langle g | \hat{\mathbf{r}} | a \rangle = -im_e\omega \langle g | \hat{\mathbf{r}} | a \rangle \quad (2.4.9)$$

folgt. Die vorstehenden Ergebnisse führen zusammen schließlich zu

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\pi\omega^2 \cdot \left(\frac{e}{m_e} \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\omega}} \right)^2 \cdot \frac{8\pi}{3} \cdot m_e^2\omega^2 \left| \langle g | \hat{\mathbf{r}} | a \rangle \right|^2 \\ &= \frac{4}{3} \alpha\omega^3 \left| \langle g | \hat{\mathbf{r}} | a \rangle \right|^2 \quad . \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Die Zerfallsrate soll für die Abstrahlung eines Photons beim Übergang vom angeregten $2p$ -Zustand mit $m = 0$ in den $1s$ -Grundzustand im Wasserstoffatom konkret angegeben werden. Die Zerfallsrate entspricht in diesem Falle dem Einstein-Koeffizienten für die spontane Emission und ist in der Ortsdarstellung durch

$$\Gamma = \frac{4}{3} \alpha\omega^3 \left| \vec{M}_{21} \right|^2 \quad \text{mit} \quad \vec{M}_{21} = \langle \Psi_{210} | \vec{r} | \Psi_{100} \rangle \quad (2.4.11)$$

gegeben. Mit $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ und den beiden Wellenfunktionen

$$\Psi_{100} = \frac{2}{a^{3/2}} e^{-\frac{r}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (2.4.12)$$

$$\Psi_{210} = \frac{1}{2\sqrt{6} a^{5/2}} r e^{-\frac{r}{2a}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (2.4.13)$$

des Wasserstoffatoms ergibt sich für die Matrixelemente

$$M_{21;x} = \int_0^\infty \cdots dr \int_0^\pi \cdots d\theta \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0 \quad (2.4.14)$$

$$M_{21;y} = \int_0^\infty \cdots dr \int_0^\pi \cdots d\theta \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0 \quad (2.4.15)$$

$$\begin{aligned} M_{21;z} &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{6} a^4} r^4 e^{-\frac{3r}{2a}} dr \int_0^\pi \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{4!}{\sqrt{6} a^4} \left(\frac{2a}{3}\right)^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{2}{3} \cdot 2\pi = \frac{2^{15/2}}{3^5} a \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

und damit wird

$$|\vec{M}_{21}|^2 = |M_{21;x}|^2 + |M_{21;y}|^2 + |M_{21;z}|^2 = \frac{2^{15}}{3^{10}} a^2 \quad . \quad (2.4.17)$$

Mit dem Bohr-Radius $a = 0.5292 \cdot 10^{-10}$ m ergibt sich für die Frequenz des Photons (die Feinstruktur kann vernachlässigt werden)

$$\omega = \frac{\alpha}{2a} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3\alpha}{8a} = 2\pi \cdot 2.468 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad , \quad (2.4.18)$$

woraus schließlich die Zerfallsrate

$$\Gamma = \frac{4}{3} \alpha \left(\frac{3\alpha}{8a} \right)^3 \frac{2^{15}}{3^{10}} a^2 = \left(\frac{2}{3} \right)^8 \frac{\alpha^4}{a} = 6.27 \cdot 10^8 / \text{s} \quad (2.4.19)$$

folgt. Für die angeregten $2p$ -Zustände mit $m = +1$ oder $m = -1$ ergeben sich durch analoge Rechnungen jeweils die gleiche Zerfallsrate. Die mittlere Lebensdauer eines $2p$ -Zustandes ist mit $\tau = 1/\Gamma = 1.6 \cdot 10^{-9}$ s also extrem kurz. Dieser in der Dipolnäherung berechnete Werte stimmt ausgezeichnet mit dem experimentell ermitteltem Wert (siehe [Bic66]) überein.

Betrachtet nun ein Beobachter das System zu einem Zeitpunkt t_b und stellt fest, dass die Emission des Photons bereits stattgefunden hat, dann kann er aber nichts über den tatsächlichen Zeitpunkt der Emission aussagen. Wenn der Zerfallsprozess einen objektiven Charakter besitzen und nicht von der subjektiven Kenntnisnahme eines Beobachter abhängen soll, muss die Emission eines Photons von einem einzelnen angeregten Zustand tatsächlich zu einem Zeitpunkt t_e erfolgt sein, unabhängig von irgendeinem Prozess der Beobachtung. Ab dem Zeitpunkt t_e ist das Photon mit Gewissheit anzutreffen. Dies muss der Zustandsvektor ausdrücken und bedeutet, dass direkt nach dem realen Prozess der Emission zum Quantensystem ein neuer Zustandsvektor gehört:

$$|\eta(t)\rangle = \begin{cases} \alpha(t) \cdot e^{-iE_a t} |a, 0_\gamma\rangle + \beta(t) \cdot e^{-i(E_g + \omega)t} |g, \gamma\rangle & \text{für } t < t_e \\ e^{-i(E_g + \omega)t} |g, \gamma\rangle & \text{für } t > t_e \end{cases}$$

Ein Beobachter wird den neuen Zustand aber erst dann wahrnehmen, wenn er eine entsprechende Messung vornimmt. Seine Kenntnis über die Änderung des Zustandsvektors findet erst zum Zeitpunkt der Beobachtung $t_b > t_e$ statt. Diese Änderung seiner Kenntnis ist unabhängig davon, wann der tatsächliche Zeitpunkt t_e der objektiven Änderung des Zustandsvektors war.

Anmerkung: Die Emission des Photons ist dabei in jede Richtung des Raumes und mit jeder zulässigen Polarisation möglich, wobei natürlich immer nur eine der möglichen Varianten realisiert wird.

Kapitel 3

Dekohärenz ohne Verschränkung

Anmerkung: Dieser Abschnitt basiert auf den Artikeln [Dro17] und [Dro18]. Ich entwickle aber zusätzlich ein explizites Modell für das stochastische Verhalten des Wärmebades.

3.1 Quantensprünge

Der Zerfall eines Teilchens oder die Emission eines Photons sind Ereignisse, die in einem Augenblick instantan stattfinden, sogenannte Quantensprünge. Quantensprünge sind direkt beobachtbar; siehe hierzu [Nag86]. Dazu zählen zum Beispiel:

- Zerfall eines elementaren Teilchens
- Absorption und Emission von Photonen durch Atome
- Einfang oder Emission eines Teilchens durch ein Atom
- Zerfall und Verschmelzung von Atomkernen
- Absorption und Emission von Phononen in Festkörpern

Es mag zunächst überraschen, bei den Beispielen auch Wechselwirkungen mit Phononen zu finden, da es sich bei Phononen ja um Quasiteilchen handelt. Da Phononen aber als die Feldquanten von Schwingungsmoden der Ionen im

Gitter eines Festkörpers definiert sind und diese nur diskrete Energiewerte annehmen können, ist jede Änderung der Schwingungsmoden durch elektromagnetische Wechselwirkung mit einem Quantensprung verbunden.

Prozesse wie oben aufgelistet haben zur Nukleosynthese der Elemente bei der Entwicklung des Universums beigetragen, lange bevor irgendein körperlicher Beobachter existierte. Dies ist ein weiteres Indiz dafür, dass die erwähnten Prozesse zu bestimmten Zeitpunkten unabhängig von einem Beobachter oder einem Messgerät real stattfinden. Es ist wenig überzeugend anzunehmen, dass zum Beispiel die Entwicklung der Sterne, deren Energiegewinnung auf diesen Prozessen beruht, sich erst zu dem Zeitpunkt manifestiert, wenn sie durch ein sich später bildendes Bewusstsein beobachtet werden.

Insgesamt führen die vorstehenden Überlegungen zu folgender

Hypothese: Quantensprünge sind Prozesse, die unabhängig von einem Beobachter real spontan stattfinden. Zu jedem Quantensystem gehört nach einem Quantensprung ein neuer an die geänderten Freiheitsgrade angepasster Zustandsvektor. Der Zustandsvektor verändert sich mit jedem Quantensprung.

3.2 Das Wärmebad

Ein Wärmebad ist System mit einer makroskopischen Anzahl von Freiheitsgraden, das sich mit der Umgebung im thermischen Gleichgewicht befindet und dessen Temperatur sich bei Entnahme einer endlichen Wärmemenge praktisch nicht ändert. Die Zustandsdichte soll dabei so groß sein, dass der Abstand zwischen zwei Energieniveaus kleiner als die Breite der Energieniveaus wird. Dies bedeutet, dass durch die Emission und Absorption von Phononen ein ständiger Energieaustausch zwischen den inneren Freiheitsgraden stattfindet. Zudem werden mit der Umgebung ständig Photonen in Form von Wärmestrahlung ausgetauscht.

Jeder der Emissions- oder Absorptionsprozesse findet in einer stochastischen Form statt und erfordert eine korrespondierende Anpassung des Zustandsvektors. Die stochastische Dynamik führt zu einem begrenzten Gedächtnis über die früheren Zustände und nur zu begrenzten raumzeitlichen Bereichen in denen Superpositionen erhalten bleiben können. Ein Wärmebad ist deshalb nicht durch eine unitäre Dynamik beschreibbar und damit kein sich zeitlich linear entwickelnder quantentheoretischer Vielteilchen-Zustand. Es ist eine Ansammlung von lokalisierter Wellenpaketen, die sich nur über einen begrenzten Zeit- und Raumbereich kohärent entwickeln können.

Ein typisches Wärmebad ist der Absorptionsbereich einer Avalanche-Photodiode, mit der sich einzelne Photonen nachweisen lassen. Abbildung 3.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau einer Avalanche-Photodiode. Eine Avalanche-Photodiode wird mit einer Sperrspannung sehr nahe am Durchbruch betrieben. In dem Fall reicht schon ein einzelnes Photon aus, um eines der Elektronen vom Valenzband in das Leitungsband zu heben. Dort wird es anschließend durch die anliegende hohe Sperrspannung so stark beschleunigt, dass beim Auftreffen auf die Multiplikationsschicht ein Lawineneffekt auftritt und ein makroskopischer Stromimpuls gemessen werden kann.

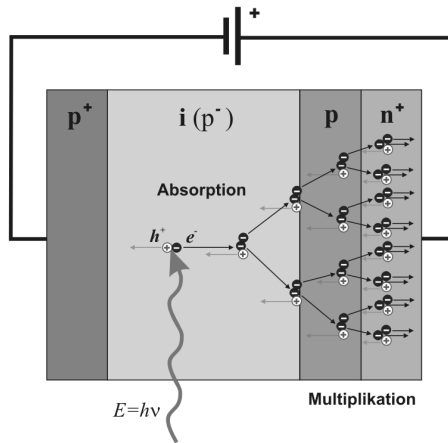


Abbildung 3.1: Aufbau und Funktion einer Avalanche-Photodiode [Wik11]

Tritt das Photon zum Zeitpunkt $t = 0$ in den Absorptionsbereich ein, so wird der Zustandsvektor in sehr vereinfachter Schreibweise durch

$$|\eta_s\rangle = \alpha \cdot e^{-i\omega t} |g\rangle + \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n}{\sqrt{N}} \cdot e^{-i(E_a - E_g)t} |a_n\rangle \quad (3.2.1)$$

dargestellt, da jedes dieser Elektronen durch das Photon in das Leitungsband angeregt werden könnte. Dabei wurde die Gesamtenergie der Elektronen im Valenzband (dem Grundzustand) als Nullpunkt gewählt und E_g steht für die Energie eines der N gebundenen Elektronen im Valenzband sowie E_a für die Energie eines angeregten freien Elektrons im Leitungsband. Die β_n unterscheiden sich, da die einzelnen Elektronen sich an unterschiedlichen Orten im Absorptionsbereich befinden.

Man muss sich verdeutlichen, dass die Absorption des Photons nicht durch das angeregte Elektron erfolgt, sondern durch die Wechselwirkung mit dem Quantensystem des Absorptionsbereichs der Avalanche-Diode, da sonst auch nicht die gleichzeitige Erhaltung von Energie und Impuls möglich wäre. Im Absorptionsbereich kann aber jedes der Elektronen in das Leitungsband angeregt werden. Der Quantenzustand direkt nach der Absorption des Photons enthält deshalb die Superposition der Zustände der in das Leitungsband anregbaren Elektronen.

Der Einfluss des Wärmebades ist am einfachsten bei Betrachtung des Dichteoperators

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_s = & |\alpha|^2 \cdot |g\rangle\langle g| + \sum_{m=1}^N \frac{\alpha\beta_m^*}{\sqrt{N}} \cdot |g\rangle\langle a_m| \\ & + \sum_{n=1}^N \frac{\alpha^*\beta_n}{\sqrt{N}} \cdot |a_n\rangle\langle g| + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\beta_n\beta_m^*}{N} \cdot |a_n\rangle\langle a_m| \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

des Systems zu verstehen. Das Wärmebad ist nicht durch einen Vielteilchen-Zustand mit linearer Zeitentwicklung beschreibbar, sondern es finden in stochastischer Weise Emissions- und Absorptionsprozesse statt. Hierdurch müssen bei Berücksichtigung des Wärmebades nach ausreichend langer Zeit im Dichteoperator (für Details siehe unten) die Interferenzterme im Wärmebad verschwinden und der Dichteoperator in die reduzierte Form

$$\hat{\rho}_s \longrightarrow \hat{\rho}_r = |\alpha|^2 \cdot |g\rangle\langle g| + \sum_{n=1}^N \frac{|\beta_n|^2}{N} \cdot |a_n\rangle\langle a_n| \quad (3.2.3)$$

übergehen. Die Wahrscheinlichkeit für die Anregung eines bestimmten Elektrons ergibt sich durch entsprechende Spurbildung. So folgt als Beispiel für das i -te Elektron

$$W(a_i) = \langle a_i | \hat{\rho}_r | a_i \rangle = \frac{|\beta_i|^2}{N} \quad , \quad (3.2.4)$$

was der Born-Regel entspricht.

Das Verschwinden der Interferenzterme ist am anschaulichsten bei Betrachtung nur eines Elektrons zu zeigen. Die Übertragung auf die Situation mit vielen Elektronen ergibt sich dann sofort, wenn man die gerechtfertigte Annahme trifft, dass die angeregten Zustände der Elektronen nicht miteinander korreliert

sind. Ausgangspunkt der Überlegungen ist der Dichteoperator (3.2.2) in seiner nun vereinfachten Form

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_s &= |\alpha|^2 \cdot |g\rangle\langle g| + \alpha\beta^* \cdot |g\rangle\langle a| + \alpha^*\beta \cdot |a\rangle\langle g| + |\beta|^2 \cdot |a\rangle\langle a| \\ &= \hat{\rho}_{gg} + \hat{\rho}_{ga} + \hat{\rho}_{ag} + \hat{\rho}_{aa} \quad ,\end{aligned}\quad (3.2.5)$$

wobei zu beachten ist, dass die Komponenten $\hat{\rho}_{**}$ des Dichteoperators selbst keine Dichteoperatoren sind. [Mit den Annahmen](#)

- der Born-Approximation, d.h. einer nur schwachen Kopplung zwischen dem System und dem Wärmebad,
- und der Markov-Approximation, d.h. einer im Wärmebad wesentlich schnelleren Zeitentwicklung als im betrachteten System,

lässt sich zeigen, dass die allgemeinste Form der zeitlichen Entwicklung eines Dichteoperators im Wärmebad durch die Lindblad-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_s = -i[\hat{H}, \hat{\rho}_s] + \sum_j \gamma_j \left(\hat{L}_j \hat{\rho}_s \hat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2} \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j \hat{\rho}_s - \frac{1}{2} \hat{\rho}_s \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j \right) \quad (3.2.6)$$

mit den sogenannten Lindblad-Operatoren \hat{L}_j bestimmt wird. Dabei sind die $\gamma_j > 0$. Besitzt das System N unterschiedliche Zustände, so läuft die Summe über maximal $J = N^2 - 1$ Terme. Unter der Annahme, dass der Grundzustand im Valenzband nicht durch die Phononen beeinflusst wird, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_g = -i[\hat{H}, \hat{\rho}_g] \quad \text{sowie} \quad \hat{L}_j |g\rangle = \hat{L}_j^\dagger |g\rangle = 0 \quad (3.2.7)$$

gilt, lassen sich durch Einsetzen des Dichtoperators (3.2.5) aus der Lindblad-Gleichung die Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_a = -i[\hat{H}, \hat{\rho}_a] + \sum_j \gamma_j \left(\hat{L}_j \hat{\rho}_a \hat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2} \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j \hat{\rho}_a - \frac{1}{2} \hat{\rho}_a \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j \right) \quad (3.2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_{ag} = - \sum_j \frac{\gamma_j}{2} \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j \hat{\rho}_{ag} \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_{ga} = - \sum_j \frac{\gamma_j}{2} \hat{\rho}_{ga} \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j \quad (3.2.10)$$

separieren, wobei die letzte Gleichung hermitesch konjugiert zu der zweiten Gleichung ist. Es reicht also die zweite Gleichung zu betrachten.

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\hat{\rho}_{ag}(t) = e^{-\Lambda t} \cdot \hat{\rho}_{ag}(0) \quad \text{mit} \quad \Lambda = \langle a | \sum_j \frac{\gamma_j}{2} \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j | a \rangle, \quad (3.2.11)$$

denn dann ergibt sich korrekt

$$\begin{aligned} \langle a | \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_{ag} | g \rangle &= -\Lambda \cdot \langle a | \hat{\rho}_{ag} | g \rangle \\ &= -\langle a | \sum_j \frac{\gamma_j}{2} \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j | a \rangle \cdot \langle a | \alpha^* \beta | a \rangle \langle g | g \rangle \\ &= -\langle a | \sum_j \frac{\gamma_j}{2} \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j \alpha^* \beta | a \rangle \langle g | g \rangle \\ &= \langle a | -\sum_j \frac{\gamma_j}{2} \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j \hat{\rho}_{ag} | g \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Dabei ist $\Lambda > 0$, da die Produkte $\hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j$ der Lindblad-Operatoren hermitesch sind. Dies bedeutet auch

$$\begin{aligned} |\rho_{ag}(t)| &= |\langle a | \hat{\rho}(t) | g \rangle| = |\langle a | \hat{\rho}_{ag}(t) | g \rangle| \\ &= e^{-\Lambda t} \cdot |\langle a | \hat{\rho}_{ag}(0) | g \rangle| \leq e^{-\Lambda t} \cdot |\rho_{ag}(0)|. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Wie erwartet, verschwindet der Interferenzterm nach einer hinreichend langen Zeit. Der Dichteoperator entspricht dem eines Ensembles.

Anmerkung: Über die Zulässigkeit des letzten Schrittes bei der Ableitung (3.2.12) bin ich mir noch nicht im klaren. Für hermitesche Operatoren $\hat{L}_j^\dagger = \hat{L}_j$ wird die Gültigkeit von (3.2.13) aber auf anderem Wege in [Jos03] gezeigt.

Für den oben betrachteten Fall mit mehreren Elektronen ergibt sich der Dichteoperator (3.2.3), der keine Interferenzterme besitzt. Da das Wärmebad aber nicht durch einen Vielteilchen-Zustand mit einer unitären Zeitentwicklung repräsentiert werden kann, existiert (anders als beim Dekohärenz-Prozess) kein verschränkter Zustand mit dem Wärmebad. Der entstehende Zustandsvektor kann somit nur ein reiner Produktzustand mit dem Wärmebad sein. Der Dichteoperator kann deshalb nurmehr ein Ensemble der Elektronenzustände repräsentieren. D.h. durch die Wechselwirkung mit dem Wärmebad ergibt sich ein Quantenzustand mit genau einem Elektron (und keiner Superposition mit anderen potentiell anregbaren Elektronen) im Leitungsband.

Dies ist der erste Schritt, um die Absorption des Photons klassisch betrachten zu können. Das eine praktisch freie Elektron im Leitungsband ist ein Quantenobjekt, das durch seinen Zustandsvektor bzw. in der Ortsdarstellung durch seine Wellenfunktion zu beschreiben ist. Die Wellenfunktion eines freien Teilchen „läuft aber auseinander“ (siehe z.B. [End13]); d.h. das Elektron würde bei freier Ausbreitung zunehmend delokalisiert werden, was in immer größeren räumlichen Bereichen zu Interferenzen führen könnte. Hier kommt die Beziehung (3.2.8) ins Spiel.

3.3 Die Caldeira-Leggett-Gleichung

Die Lindblad-Gleichung ist eine phänomenologische Gleichung, die keine Aussage über die Lindblad-Operatoren \hat{L}_j des Systems trifft. Die Bestimmung der Lindblad-Operatoren erfordert ein konkretes Modell des Wärmebades und der Wechselwirkung mit diesem. In einfachen Fällen kann man die Lindblad-Operatoren durch „intelligentes Raten“ bestimmen. Das einfachste Modell ergibt sich für ein annähernd ruhendes Elektron. Die einzige relevante Observable ist dann der Ortsoperator, wodurch man zu dem einfachen Ansatz

$$\hat{L}_j = \frac{\hat{X}_j}{\lambda} \quad (3.3.1)$$

geführt wird. Dabei ist λ ein noch zu bestimmender Längenparameter, um die Lindblad-Operatoren dimensionslos zu halten. Da alle Raumrichtungen gleichberechtigt sind muss zudem $\gamma_j = \gamma$ sein. Der durch die Umgebung bedingte Term geht dann wegen $\hat{X}_j^\dagger = \hat{X}_j$ in die sehr einfache Form

$$\begin{aligned} \sum_j \gamma_j \left(\hat{L}_j \hat{\rho}_a \hat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2} \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j \hat{\rho}_a - \frac{1}{2} \hat{\rho}_a \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j \right) \\ = \frac{\gamma}{\lambda^2} \sum_j \left(\hat{X}_j \hat{\rho}_a \hat{X}_j - \frac{1}{2} \hat{X}_j \hat{X}_j \hat{\rho}_a - \frac{1}{2} \hat{\rho}_a \hat{X}_j \hat{X}_j \right) \\ = \frac{\gamma}{\lambda^2} \left(\vec{X} \hat{\rho}_a \vec{X} - \frac{1}{2} \vec{X} \vec{X} \hat{\rho}_a - \frac{1}{2} \hat{\rho}_a \vec{X} \vec{X} \right) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

über. Für ein fast ruhendes Elektron kann der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung (3.2.6) vernachlässigt werden und die Lindblad-Gleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_a \simeq \frac{\gamma}{\lambda^2} \left(\vec{X} \hat{\rho}_a \vec{X} - \frac{1}{2} \vec{X} \vec{X} \hat{\rho}_a - \frac{1}{2} \hat{\rho}_a \vec{X} \vec{X} \right) \quad (3.3.3)$$

bzw. in der Ortsdarstellung mit $\rho_a(\vec{x}, \vec{x}', t) = \langle \vec{x} | \hat{\rho}_a | \vec{x}' \rangle$ zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_a(\vec{x}, \vec{x}', t) &= \frac{\gamma}{\lambda^2} \left(\vec{x} \rho_a(\vec{x}, \vec{x}', t) \vec{x}' - \frac{1}{2} \vec{x}^2 \rho_a(\vec{x}, \vec{x}', t) - \frac{1}{2} \rho_a(\vec{x}, \vec{x}', t) \vec{x}'^2 \right) \\ &= -\frac{\gamma}{2\lambda^2} (\vec{x} - \vec{x}')^2 \rho_a(\vec{x}, \vec{x}', t) \quad . \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Als Lösung kann man sofort

$$\rho_a(\vec{x}, \vec{x}', t) = e^{-\frac{\gamma}{2\lambda^2} (\vec{x} - \vec{x}')^2 t} \rho_a(\vec{x}, \vec{x}', 0) \quad (3.3.5)$$

ablesen. Dies bedeutet, dass räumliche Interferenzen, die in der Dichtematrix durch $\vec{x} \neq \vec{x}'$ repräsentiert werden, exponentiell abklingen. Die Dichtematrix wird diagonal.

Im allgemeinen Fall kann man die Bewegung des Elektrons jedoch nicht vernachlässigen. Dann wird auch der Impulsoperator relevant und es liegt nahe für den Lindblad-Operator den linearen Ansatz (aus Gründen der Übersichtlichkeit ab hier nur für eine Dimension betrachtet)

$$\hat{L} = \frac{\hat{X}}{\lambda} + i\lambda\hat{P} \quad (3.3.6)$$

zu versuchen. Unter Ausnutzung der Vertauschungsrelationen zwischen dem Orts- und dem Impulsoperator folgt

$$\begin{aligned} \hat{L}\hat{\rho}_a\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{L}^\dagger\hat{L}\hat{\rho}_a - \frac{1}{2}\hat{\rho}_a\hat{L}^\dagger\hat{L} &= \left(\frac{\hat{X}}{\lambda} + i\lambda\hat{P} \right) \hat{\rho}_a \left(\frac{\hat{X}}{\lambda} - i\lambda\hat{P} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{X}}{\lambda} - i\lambda\hat{P} \right) \left(\frac{\hat{X}}{\lambda} + i\lambda\hat{P} \right) \hat{\rho}_a - \frac{1}{2} \hat{\rho}_a \left(\frac{\hat{X}}{\lambda} - i\lambda\hat{P} \right) \left(\frac{\hat{X}}{\lambda} + i\lambda\hat{P} \right) \\ &= -i[\hat{X}, \{\hat{P}, \hat{\rho}_a\}] - \frac{1}{2\lambda^2} [\hat{X}, [\hat{X}, \hat{\rho}_a]] - \frac{\lambda^2}{2} [\hat{P}, [\hat{P}, \hat{\rho}_a]] \quad . \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Damit erhält man für das im Leitungsband freie Elektron schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_a &= -\frac{i}{2m_e} [\hat{P}^2, \hat{\rho}_a] - i\gamma [\hat{X}, \{\hat{P}, \hat{\rho}_a\}] \\ &\quad - \frac{\gamma}{2\lambda^2} [\hat{X}, [\hat{X}, \hat{\rho}_a]] - \frac{\lambda^2\gamma}{2} [\hat{P}, [\hat{P}, \hat{\rho}_a]] \quad , \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

was identisch mit der sogenannten Caldeira-Leggett-Gleichung ist.

Die Caldeira-Leggett-Gleichung ergibt sich aus der detaillierten Betrachtung der Wechselwirkung zwischen dem Elektron und dem Wärmebad und wird in der Literatur ausführlich diskutiert. Siehe zum Beispiel [Bre02]. Dies erlaubt (in SI-Einheiten) die Identifikation

$$\lambda = \frac{\lambda_{thdB}}{\sqrt{8\pi}} = \frac{\hbar}{\sqrt{4m_e k_b T}} \quad (3.3.9)$$

des Längenparameters. Dieser liegt in der Größenordnung der thermischen deBroglie Wellenlänge des Elektrons bei der Temperatur T . Für die Raumtemperatur folgt der sehr kleine Wert von $\lambda|_{T=300^\circ\text{K}} \approx 86 \cdot 10^{-9} \text{ m}$.

Aus der Definition des adjungierten Operators

$$\langle x|\hat{O}|x'\rangle = \left(\langle x'|\hat{O}^\dagger|x\rangle \right)^* \quad (3.3.10)$$

folgen für die Ortsdarstellung die beiden Beziehungen:

$$\langle x|\hat{\rho}P|x'\rangle = +i \frac{\partial}{\partial x'} \rho(x, x', t) \quad (3.3.11)$$

$$\langle x|P\hat{\rho}|x'\rangle = -i \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, x', t) \quad (3.3.12)$$

Dies führt für die Caldeira-Leggett-Gleichung zu der Ortsdarstellung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, x', t) = & \left[\frac{i}{2m_e} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) - \gamma(x - x') \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\gamma}{2\lambda^2} (x - x')^2 + \frac{\lambda^2 \gamma}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 \right] \rho(x, x', t) \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Auch die Lösung dieser Gleichung liefert eine extrem schnelle Dekohärenz der Dichtematrix. Dies ist plausibel, da λ sehr klein ist und damit die zusätzlichen Terme klein gegen den Term proportional zu $1/\lambda^2$ sind. Eine sehr detaillierte Diskussion findet sich bei [Jos03] und soll hier nicht wiederholt werden.

Ein Aspekt ist an dieser Stelle aber noch wichtig. Strebt das System, bestehend aus dem Elektron und dem Wärmebad, auf das thermische Gleichgewicht zu, so muss sich die Dichtematrix in Richtung einer stationären Lösung entwickeln. (3.3.13) besitzt die stationäre Lösung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, x', t)|_{\text{st}} = 0 \quad \implies \quad \rho_a(x, x', t)|_{\text{st}} = C e^{-\frac{(x-x')^2}{2(2\lambda)^2}} \quad , \quad (3.3.14)$$

was leicht einzusehen ist, da für $\rho(x, x', t)|_{\text{st}}$ der erste und der vierte Term auf der rechten Seite von (3.3.13) verschwinden. Die Richtung maximaler Kohärenz ist durch $x' = -x$ gegeben und für diese Richtung wird

$$\rho_a(x, -x, t)|_{\text{st}} = C e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} \quad . \quad (3.3.15)$$

Der Längenbereich, in dem noch Interferenzen auftreten können, lässt sich damit ungefähr auf die Größenordnung der deBroglie Wellenlänge eingrenzen. Auf diese wird das Elektron lokalisiert. Damit weist das Elektron im System Elektron/Wärmebad makroskopisch ein klassisches Verhalten auf.

Es ist wichtig anzumerken, dass diese Dekohärenz nur die Freiheitsgrade betrifft, die am Energieaustausch mit dem Wärmebad beteiligt sind. Als Beispiel werden makroskopische Quantenzustände wie Supraleiter hierdurch nicht ausgeschlossen, da die bei den tiefen Temperaturen sich bildenden Cooper-Paare der Elektronen durch die entstehende Energielücke nur extrem schwach mit den Phononen wechselwirken.

Kapitel 4

Beispiele für den Messprozess

4.1 Der Doppelspalt-Versuch

Mit den vorstehenden Überlegungen kann nun das Doppelspalt-Experiment analysiert werden. Dabei soll jeweils nur ein Photon durch den Doppelspalt laufen und der Nachweisschirm soll durch $M \times N$ dicht gepackte Avalanche-Dioden aufgebaut sein. Da die Absorption eines Photons ein Quantensprung und damit ein real stattfindender Prozess ist, wird genau eine Avalanche-Diode zu einem Zeitpunkt t_a am Nachweisschirm ansprechen:

$$\begin{aligned}
 |\eta(t \leq t_a)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1_\gamma^{\text{Sp1}}(t)\rangle + |1_\gamma^{\text{Sp2}}(t)\rangle \right) \prod_{m,n} |g_{m,n}\rangle \\
 &\xrightarrow{t=t_a} |\eta(t > t_a)\rangle = |0_\gamma\rangle |a_{i,j}\rangle \prod_{m,n \neq i,j} |g_{m,n}\rangle \quad (4.1.1)
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Avalanche-Diode (i, j) an der Stelle $x_{i,j}$ das Photon absorbiert, ist dann:

$$\begin{aligned}
 w(i, j) &= \left| \langle x_{i,j} | \langle g_{i,j} | \eta(t_a) \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left| \langle x_{i,j} | 1_\gamma^{\text{Sp1}}(t_a) \rangle + \langle x_{i,j} | 1_\gamma^{\text{Sp2}}(t_a) \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left| \langle x_{i,j} | 1_\gamma^{\text{Sp1}}(t_a) \rangle \right|^2 + \left| \langle x_{i,j} | 1_\gamma^{\text{Sp2}}(t_a) \rangle \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \langle x_{i,j} | 1_\gamma^{\text{Sp1}}(t_a) \rangle \langle 1_\gamma^{\text{Sp2}}(t_a) | x_{i,j} \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \langle x_{i,j} | 1_\gamma^{\text{Sp2}}(t_a) \rangle \langle 1_\gamma^{\text{Sp1}}(t_a) | x_{i,j} \rangle \right) \quad (4.1.2)
 \end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Termen folgen die nach dem Durchgang von vielen Photonen sich manifestierenden Interferenzen. Die Beziehung bedeutet nicht, dass sich das Photon am Ort $x_{i,j}$ befunden hat, sondern das der durch die Wechselwirkung zwischen dem Photon-Feld und den Detektor-Dioden bedingte Quantensprung mit dieser Wahrscheinlichkeit dort stattfindet.

In der Literatur wird der Doppelspaltversuch oft alleine mit dem Wellenbild des Photons erklärt. Man muss aber beachten, dass der Zustandsvektor immer die Kombination von Nachweisschirm und Photon repräsentiert. Die Kontextabhängigkeit der Quantentheorie erfordert eine holistische Betrachtung.

Nach Absorption des Photons liegt bei der vorstehenden Betrachtung im Gegensatz zur Kopenhagener Interpretation keine Superposition von Nachweisschirmen mit jeweils einer anderen angeregten Avalanche-Diode vor, da die Absorption einen Quantensprung darstellt. Ein solcher liegt auch bei anderen Nachweismethoden vor. Als Beispiel erfolgt bei einer Photoplatte die Aufspaltung eines Silberhalogenid-Moleküls durch Absorption des einfallenden Photons in die zwei beteiligten Atome. Die Änderung des Zustandsvektors ist unabhängig davon, ob ein Beobachter den Stromimpuls in der Avalanche-Diode oder die Schwärzung auf der Photoplatte registriert oder nicht.

4.2 Zerstörungsfreie Messung

Es soll der zerstörungsfreie quantenmechanische Messprozess diskutiert werden, der wiederholte Messungen am zu untersuchenden Quantenobjekt erlaubt; d.h. auch nach der Messung wird das Quantenobjekt durch einen Zustandsvektor im Hilbert-Raum des Quantenobjekt beschrieben.

Die Kopenhagener Interpretation

Ein wesentlicher Aspekt der Kopenhagener Interpretation ist die Trennung der Welt in das zu untersuchende Quantenobjekt und die makroskopische Welt, zu der auch die Messeinrichtung gehört. Der Zustand des Quantenobjekt wird dabei vollständig durch die Eigenzustände $|\ell\rangle$ einer (oder mehrere) Observablen bestimmt

$$|\eta_{qs}\rangle = \sum_{\ell=1}^L c_{\ell} |\ell\rangle \quad \text{mit} \quad \sum_{\ell=1}^L |c_{\ell}|^2 = 1 \quad . \quad (4.2.1)$$

Das Ergebnis einer Messung an diesem Quantenobjekt ist dann einer der Eigenzustände $|\ell\rangle$ der Observablen, die der Messeinrichtung zugeordnet ist.

Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Eigenzustand als Messergebnis zu erhalten, ist $w(\ell) = |c_\ell|^2$. Eine Messung wird also durch den Übergang

$$|\eta_{qs}\rangle = \sum_{\ell=1}^L c_\ell |\ell\rangle \quad \xrightarrow{\text{Messung}} \quad |\ell\rangle \quad \text{mit} \quad w(\ell) = |c_\ell|^2 \quad (4.2.2)$$

beschrieben, bei dem der Zustandsvektor instantan in den gemessenen Zustand übergeht. Der Zustandsvektor nach einer Messung ist im allgemeinen ein vollständig anderer als vor der Messung. Dies ist der berühmte Kollaps des Zustandsvektors, der durch den Prozess der Beobachtung erfolgen soll.

von Neumann Modell des Messprozesses

In dieser Variante der Kopenhagener Interpretation wird davon ausgegangen, dass der sogenannte Schnitt zwischen der quantenmechanischen Welt und der klassischen Welt beliebig gelegt werden kann, solange er nicht das Bewusstsein des Beobachters mit einbezieht. Weiter wird davon ausgegangen, dass auch die Messeinrichtung quantenmechanisch durch die lineare Schrödinger-Gleichung beschrieben werden kann. Der Messprozess führt dann zu einer Verschränkung zwischen dem Quantenobjekt und der Messeinrichtung

$$|\eta_{qs}\rangle |M_0\rangle \xrightarrow[\text{wirkung}]{\text{Messwechsel-}} |\eta_{qsm}\rangle = \sum_{\ell=1}^L c_\ell |\ell\rangle |M_\ell\rangle \xrightarrow[w(\ell)=|c_\ell|^2]{\text{Kollaps}} |\ell\rangle |M_\ell\rangle. \quad (4.2.3)$$

Der Kollaps der Zustandsvektors muss dann spätestens durch das Bewusstsein des Beobachters verursacht werden. Auch diese Erklärung ist nach Ansicht vieler Physiker sehr unplausibel. Diese Darstellung ist aber auch zweckmäßig, wenn Teile der Messeinrichtung noch quantenmechanisch beschreibbar sind.

Der hier getroffene Ansatz

Treten bei der in einem Experiment folgenden Messung mit einer makroskopischen Messeinrichtung Quantensprünge auf, so erfordern diese nach der Messung einen angepassten Zustandsvektors. Ein Beispiel hierfür ist der oben diskutierte Doppelspaltversuch. **Sind keine Quantensprünge mit dem Messprozess verbunden, bleibt zu erklären, warum sich ein eindeutiges Messergebnis einstellt.** Hierfür ist es zweckmäßig den Vielteilchen-Zustand der makroskopische Messeinrichtung in zwei Komponenten $|M\rangle = |T\rangle |Z\rangle$ aufzuteilen. Dabei soll das Triggersystem $|T\rangle$ den Teil umfassen, der direkt mit dem Quantenobjekt wechselwirkt und selbst einer unitären Zeitentwicklung folgt, während $|Z\rangle$ den restlichen Teil einschließlich des makroskopischen Zeigers umfassen soll. Da das Zeigersystem $|Z\rangle$ mit seiner Umgebung im thermischen Gleichgewicht ist, stellt es für das Triggersystem $|T\rangle$ ein Wärmebad dar.

Der Messprozess läuft dann wie folgt ab:

- Das zu untersuchende Quantenobjekt kommt in den Wechselwirkungsbereich der Messeinrichtung.
- Es findet durch die Messwechselwirkung eine Verschränkung mit dem Triggersystem der Messeinrichtung statt.
- Aufgrund der vollkommenen stochastischen Prozesse im Zeigersystem wird durch Dekohärenz eine einzelne Komponente des verschränkten Triggersystems realisiert.
- Der realisierte Zustand des Triggersystems pflanzt sich bis zum zugehörigen Zustand des Zeigersystems fort.

Formal dargestellt sieht dies wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 |\eta_{qs}\rangle |T_0\rangle |Z_0\rangle &\xrightarrow[\text{wirkung}]{\text{Messwechsel-}} |\eta_{qsm}\rangle = \sum_{\ell=1}^L c_\ell |\ell\rangle |T_\ell\rangle |Z_0\rangle \\
 &\xrightarrow[\text{Verschränkung}]{\text{Dekohärenz ohne}} \hat{\rho}_{\text{qst}} = \sum_{\ell=1}^L |c_\ell|^2 |Z_0\rangle |T_\ell\rangle |\ell\rangle \langle \ell| \langle T_\ell| \langle Z_0| \\
 &\xrightarrow[\text{ein Ensemble}]{\text{repräsentiert}} |\eta\rangle_{\text{qst}} = |\ell\rangle |T_\ell\rangle |Z_0\rangle \quad \text{mit} \quad w(\ell) = |c_\ell|^2 \\
 &\xrightarrow[\text{entwicklung } T_\ell \rightarrow Z_\ell]{\text{nicht unitäre Zeit-}} |\eta\rangle_{\text{qstz}} = |\ell\rangle |T_\ell\rangle |Z_\ell\rangle
 \end{aligned}$$

Man muss sich dabei verdeutlichen, dass die Konstruktion einer Messeinrichtung genau so erfolgt, dass

- durch die Messwechselwirkung und einer unitären Zeitentwicklung eine Verschränkung des Triggersystems mit dem zu untersuchenden Quantenobjekt eintritt,
- jedem Eigenzustand der Observablen genau ein eindeutiger Zustand des Triggersystems im verschränkten System zugeordnet ist und
- ein vorliegender eindeutiger Zustand des Triggersystems sich zu einem korrespondierenden Zustand des Zeigersystems weiter entwickelt.

Nur wenn man eine solche Messeinrichtung konstruieren kann, kann man auch eine zugehörige Observable für das Quantenobjekt definieren. Dies verdeutlicht noch einmal, dass die Observablen eines Quantenobjektes immer nur im Kontext von konkreten Messeinrichtungen zu betrachten sind.

Kapitel 5

Zusammenfassung

5.1 Die bisherigen Überlegungen

- Quantensprünge definieren eine Zeitrichtung (Richtung der Kausalität) und sind real stattfindende Prozesse unabhängig von einem Beobachter.
- Ein Wärmebad, das sich mit seiner Umgebung im thermischen Gleichgewicht befindet, ist ein Vielteilchen-Zustand, der sich nicht durch eine unitäre Zeitentwicklung beschreiben lässt, da ständig rein stochastische Emissions- und Absorptionsprozesse stattfinden.
- Ein Wärmebad hat kein Gedächtnis, sondern ist eine Ansammlung von lokalisierten Wellenpaketen, die sich nur über einen eng begrenzten Zeit- und Raumbereich kohärent entwickeln können.
- Durch Dekohärenz ohne Verschränkung verschwinden im Dichteoperator die mögliche Interferenzterme des zu untersuchenden Quantenobjekts.
- Zwischen dem Quantenobjekt, das sich in einer Superposition befindet, und dem Wärmebad kann zudem kein verschränkter Zustand entstehen.
- Der zugehörige diagonale Dichteoperator kann deshalb nur ein Ensemble von Zuständen repräsentieren. Dies bedeutet, dass sich ein definierter makroskopischer Zustand einstellt.
- In der praktischen Realisierung muss die zugehörige Messeinrichtung ein metastabiles Triggersystem besitzen, das den möglichen Eigenzuständen der zu messenden Observablen angepasst ist.

5.2 Die Rolle der Wellenfunktion

Die Wellenfunktion der Quantenmechanik, mit der sich fast alle Interpretation der Quantentheorie beschäftigen, ist in der Ortsdarstellung die Projektion des Zustandsvektors auf einen n -Teilchenzustand (siehe auch (1.11.14))

$$\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) = \langle 0 | \hat{\Psi}(\vec{x}_1) \dots \hat{\Psi}(\vec{x}_n) | \eta(t) \rangle \quad . \quad (5.2.1)$$

Nach der obigen Diskussion darf man auch die Wellenfunktion grundsätzlich nur im jeweils vorliegenden Kontext sehen. Dies trifft auch schon bei der Kopenhagener Interpretation zu. So ist als Beispiel die Wellenfunktion eines geladenen Teilchens in einem Potentialtopf eine Eigenschaft des Quantensystems bestehend aus dem Teilchen und dem Potentialtopf.

Die Anwendbarkeit der Schrödinger-Gleichung auf die Wellenfunktion ist nur bei hinreichender Isolation des betrachteten Systems möglich, so dass keine Quantensprünge stattfinden. Eine bestimmte Wellenfunktion kann einem Quantenobjekt nur zeitlich solange zugeordnet werden, bis ein Quantensprung stattfindet. Dies kann ein direkter Quantensprung sein, wie zum Beispiel bei der Emission oder Absorption eines elementaren Teilchens, oder ein indirekter Quantensprung, wie zum Beispiel durch die bei einer Messung stattfindenden Wechselwirkung mit einem Wärmebad. Nach dem Quantensprung folgt für das Quantensystem auch eine neue Wellenfunktion, was den Kollaps der Wellenfunktion darstellt.

Die Wellenfunktion kann als Projektion nicht mit dem realen physikalischen Quantensystem identifiziert werden; sie erlaubt nur eine näherungsweise Beschreibung des Verhaltens des Quantensystems bei niedrigen Energien und repräsentiert die raumzeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeiten für die in einem Kontext möglichen (direkten oder indirekten) Quantensprünge an denen das Quantensystem beteiligt sein kann. Die Wellenfunktion der Quantenmechanik stellt im Gegensatz zum Zustandsvektor nur eine Hilfsgröße dar und hat einen rein beschreibenden Charakter. Die physikalische Realität findet ihren Ausdruck nicht in der Wellenfunktion sondern erst im Rahmen der Quantenfeldtheorie.

5.3 Das Bild der Realität

Die Quantenphänomene zeigen, dass die Realität in der Quantentheorie keine klassische Struktur wie in der makroskopischen Welt hat. Aus diesem Grunde wird nachstehend konsequent von elementaren Quantenobjekten gesprochen

und nicht von Teilchen oder Wellen, da diese Begriffe automatisch mit klassischen Eigenschaften assoziiert werden.

Aus den vorstehenden Überlegungen und der Quantenfeldtheorie folgt nachstehendes Bild der physikalischen Realität:

Allgemeine Eigenschaften

- Die Naturgesetze sind in jedem Inertialsystem gleich.
- Die Lichtgeschwindigkeit ist eine Konstante.
- Raumartig getrennte Ereignisse können sich nicht beeinflussen.
- Das Quantenvakuum ist eindeutig und invariant.

Die elementaren Quantenobjekte

- Die physikalische Welt ist aus elementaren Quantenobjekte aufgebaut.
- Diese können erzeugt und vernichtet werden.
- Die elementaren Quantenobjekte einer Sorte sind ununterscheidbar.
- Sie sind durch ihre unveränderlichen Eigenschaften wie ihre Ruhemasse, ihre Ladungen und ihren Spin eindeutig definiert.
- Sie sind Träger der dynamischen Größen wie Energie, Impuls und Drehimpuls.
- Ihre Energie ist immer positiv.

Allgemeine Eigenschaften der Wechselwirkungen

- Wechselwirkungen zwischen den elementaren Quantenobjekten erfolgen punktförmig.
- Die physikalischen Gesetze besitzen eine Reihe von Symmetrien.
- Jede Symmetrie führt zu einer Erhaltungsgröße bei den stattfindenden Wechselwirkungsprozessen.
- Als dynamischen Erhaltungsgrößen folgen die Energie, der Impuls und der Drehimpuls.
- Weitere Erhaltungsgrößen sind als Beispiel die Summen der einzelnen Ladungsarten.
- Es gilt das Cluster-Dekompositionsprinzip.

Gebundene Strukturen

- Die elementaren Quantenobjekte haben die Tendenz aus energetischen Gründen gebundene Strukturen zu bilden.
- Aus Quarks bilden sich durch die starke Wechselwirkung Hadronen, wie zum Beispiel Protonen und Neutronen.
- Protonen und Neutronen verbinden sich zu Atomkernen.
- Aus den Atomkernen und Elektronen bilden sich durch die elektrische Wechselwirkung Atome.
- Atome können sich wiederum zu Molekülen zusammenfügen.
- Eine große Anzahl von Atomen und/oder Molekülen führt zu Gasen, Flüssigkeiten oder Festkörpern; d.h. den Objekten der makroskopischen Welt.

Quantensprünge

- Jede Änderung der Anzahl oder Sorte der elementaren Quantenobjekte findet durch einen Quantensprung statt. Dazu zählen
- der Zerfall eines elementaren Quantenobjektes,
- die Absorption und die Emission eines Photons durch Atome,
- die Bildung und der Zerfall von Atomkernen sowie
- die Absorption und die Emission von Phononen in Festkörpern.
- Quantensprünge besitzen einen stochastischen Charakter und sind nicht deterministisch beschreibbar.
- Die Ereignisse in der Quantenwelt unterliegen deshalb statistischen Gesetzen.
- Quantensprünge sind real stattfindende Ereignisse, die unabhängig davon sind, ob eine Beobachtung erfolgt oder nicht.

Die makroskopische Welt

- Die Objekte der makroskopischen Welt sind aus gebundenen Strukturen der Quantenwelt aufgebaut.
- Makroskopische Objekte im thermischen Gleichgewicht sind ein Wärmebad, das zwar den Gesetzen der Quantenwelt gehorcht, wegen der dort stattfindenden stochastischen Quantensprünge aber keiner unitären Zeitentwicklung mehr folgt.

- In einem Wärmebad geht ein Quantenobjekt durch Dekohärenz ohne Verschränkung in einen lokalisierten Zustand über, so dass keine Interferenzen mehr auftreten können und es für alle praktischen Belange klassisch beschrieben werden kann.
- Die Beobachtbarkeit von Phänomenen der Quantenwelt erfordert die hinreichende Isolierung des zu untersuchenden Quantensystems von einem Wärmebad.
- Aufgrund der Dekohärenz ohne Verschränkung sind Interferenzen von makroskopischen Objekten, die ja ein Wärmebad darstellen, nicht beobachtbar.
- Der makroskopische Zeitpfeil folgt aus der Richtung der Kausalität in den Quantenprozessen.
- Die Gesetzmäßigkeiten der makroskopischen Welt ergeben sich somit aus den universell gültigen Gesetzen der Quantenfeldtheorie.

Die vorstehende Auflistung zeigt ein schlüssiges Bild, wie die makroskopische Welt sich konsistent aus der Quantenwelt ergibt. Während die Schlusskette von der Quantenwelt zur makroskopischen Welt gut nachvollziehbar ist, sind die elementaren Quantenobjekte anschaulich nicht zu erfassen, da sich deren Verhalten bisher nur unvollständig durch makroskopisch besetzte Begriffe erfassen lässt und die Repräsentation der Dynamik durch die Feldoperatoren und einen Zustandsvektor im Hilbert-Raum nicht sehr anschaulich ist. Exemplarisch werden im nächsten Abschnitt das Elektron und das Photon charakterisiert.

Auch wie Quantensprünge im Detail ablaufen bleibt offen. Die Quantenfeldtheorie beschreibt aber insoweit die Realität, als dass sie die möglichen Zustände der elementaren Quantenobjekte eindeutig definiert und deren Verhalten in der Quantenwelt durch dynamische Gesetze sowie deren Wirkungen hinein in die makroskopische Welt richtig wiedergibt.

5.4 Elektronen und Photonen

Aus den im vorherigen Abschnitt aufgelisteten allgemeinen Eigenschaften folgt, dass die Quantenwelt und damit auch die makroskopische Welt invariant bei Poincare-Transformationen sind. Elektronen und Photonen lassen sich dann als invariante Zustände der Poincare-Transformation in inneren Darstellungsräumen definieren.

Für Elektronen gelten folgende Aussagen:

- Elektronen sind ununterscheidbar und keine Individuen.
- Mehrere Elektronen bilden nur vollständig antisymmetrische Zustände.
- Elektronen besitzen eine Masse von 511 keV, die elektrische Ladung -1 und sind Spin-1/2 Objekte,
- weisen keine innere Struktur auf,
- können sich in Superpositionszuständen befinden,
- wechselwirken aber trotzdem immer punktförmig und
- sind mit Teilchendetektoren lokalisierbar.

Für Photonen gelten folgende Aussagen:

- Photonen sind ununterscheidbar und keine Individuen.
- Mehrere Photonen bilden nur vollständig symmetrische Zustände.
- Photonen besitzen keine Masse, keine Ladung und sind Spin-1 Objekte,
- weisen keine innere Struktur auf,
- können sich in Superpositionszuständen befinden,
- sind prinzipiell nicht lokal,
- wechselwirken aber trotzdem immer punktförmig und
- sind mit Teilchendetektoren lokalisierbar.

Die formale Beschreibung der Dynamik und der Wechselwirkungen von den Elektronen und den Photonen ist durch die bereits im ersten Kapitel im Wechselwirkungsbild formulierten Operatorgleichungen

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\check{\Psi}(x) = 0 \quad (5.4.1)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\check{A}^\nu(x) = 0 \quad (5.4.2)$$

$$\frac{d}{dt}|\check{\eta}(t)\rangle = -i\check{H}_1(t)|\check{\eta}(t)\rangle \quad (5.4.3)$$

$$\check{H}_1(t) = -e \int :\check{\Psi}(x)\gamma_\mu\check{\Psi}(x):\check{A}^\mu(x)d^3x \quad (5.4.4)$$

gegeben. Zusammen mit den Vertauschungsrelationen wird hierdurch das Verhalten in der Quantenwelt sowie das sich ergebende Bild in der makroskopischen Welt festgelegt (für Details siehe [\[End13\]](#)). Es besteht aus meiner Sicht keine Notwendigkeit, die Elektronen oder die Photonen aufgrund der Ergebnisse von Experimenten zusätzlich durch klassische Begriffe charakterisieren zu wollen. Es wäre eher überraschend, wenn dies möglich wäre.

Literaturverzeichnis

- [Bic66] **W.S.Bickel; A.S.Goodman**
Mean Lives of the 2p and 3p Levels in Atomic Hydrogen
Physical Review Letters: Vol.148, No.1; 1966
- [Bre02] **H.P.Breuer; F.Petruccione**
The Theory of Open Quantum Systems
Oxford University Press; 2002
- [Don20] **J.F.Donoghue; G.Menezes**
Quantum causality and the arrows of time and thermodynamics
arXiv:hep-ph/2003.09047v2; 2020
- [Dro17] **B.Drossel**
Connecting the quantum and classical worlds
arXiv:quant-ph/1609.04427v2; 2017
- [Dro18] **B.Drossel; G.Ellis**
*Contextual Wavefunction collapse:
an integrated theory of quantum measurement*
New J.Phys.20 113025; 2018
- [End09] **M.Ender**
Das Standardmodell der Teilchenphysik
<http://www.manfred-ender.serpedon.de/index.html>; 2009
- [End13] **M.Ender**
Die Interpretation der Quantentheorie
<http://www.manfred-ender.serpedon.de/index.html>; 2013

- [End20] **M.Ender**
Die Nukloesyntese der Elemente
<http://www.manfred-ender.serpediton.de/index.html>; 2020
- [Jos03] **E.Joos et al.**
*Decoherence and the Appearance of a Classical World
in Quantum Theory*
Springer-Verlag; 2003
- [Nag86] **W.Nagourney; J.Sandberg; H.Dehmelt**
Shelved Optical Electron Amplifier: Observation of Quantum Jumps
Physical Review Letters: Vol.26, No.26; 1986
- [Rov15] **C.Rovelli**
An argument against the realistic interpretation of the wave function
arXiv:hep-ph/1508.05533v2; 2015
- [Wik11] **Wikimedia Commons**
File:APD3 German.png
[https://commons.wikimedia.org/wiki
/File:ADP3_German.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ADP3_German.png); 2011